

# 博奕论

(日) 宫泽光一 著

上海科学技术出版社

# 博 奕 論

〔日〕宮澤光一 著

張 毓 椿 譯

上海科學技術出版社

## 內 容 提 要

本书是日本岩波书店出版的现代应用数学丛书之一的中译本。全书共分四章,第一章博奕的构造,重点介绍效用函数概念,作为以后的准备。第二、三章2人零和博奕,分别就纯策略和混合策略的范围进行了扼要的讨论,最后一章非零和博奕,对合作博奕及Nash理论作了一般性的介绍。本书可供数学工作者,经济工作者及科学研究人员作参考。

现代应用数学丛书

## 博 奕 論

原书名 ゲームの理論

原著者 (日) 宮澤光一

原出版社 岩波书店, 1958

译者 張 毓 椿

\*

上海科学技术出版社出版

(上海瑞金二路450号)

上海市书刊出版业营业登记证出093号

新华书店上海发行所发行 各地新华书店经售

商务印书馆上海厂印刷

\*

开本 850×1168 1/32 印张 2 22/32 字数 62,000

1963年5月第1版 1963年5月第1次印刷

印数 1—6,050

统一书号: 13119 · 322

定 价: (十四) 0.48 元

## 出版說明

这一套书是根据日本岩波书店出版的“現代应用数学讲座”翻譯而成。日文原书共 15 卷 60 册, 分成 A、B 兩組, 各編有序号。現在把原来同一題目分成兩册或三册的加以合并, 整理成 42 种, 不另分組編号, 陸續翻譯出版。

这套书涉及的面很广, 其內容都和現代科学技术密切有关, 有一定参考价值。每一本书收集的資料都比較丰富, 而叙述扼要, 篇幅不多, 有利于讀者以較短時間掌握有关学科的主要內容。虽然, 这套书的某些观点不尽适合于我国的情况, 但其方法可供参考。因此, 翻譯出版这一套书, 对我国学术界是有所助益的。

由于日文原书是 1957 年起以讲座形式陸續出版的, 写作時間和篇幅的限制不可避免地会影响原作者对內容的处理, 为了尽可能地减少这种影响, 我們在每一譯本中, 特請譯者或校閱者撰写序或后記, 以介紹有关学科的最近发展状况, 并对全书內容作一些評價, 提出一些看法, 結合我国情况补充一些資料文献, 在文內过于簡略或不足的地方添加了必要的注釋和改正原书中存在的一些錯誤。希望这些工作能对讀者有所帮助。

承担翻譯和校閱的同志, 为提高书籍的质量付出了巨大劳动, 在此特致以誠摯的謝意。

欢迎讀者对本书提出批評和意見。

上海科学技术出版社

## 序

1928 年 von Neumann 在論文 “Zur Theorie der Gesellschaftsspiele” (Math. Annalen, vol. 100) 中的想法, 到 1944 年在他和 Morgenstern 合著的 “Theory of Games and Economic Behavior” 一書以及該書 1947 年的第二版中形成了 2 人零和博奕的理論。從此出發, 以  $n$  人博奕的結構分析為中心, 建立了完整的體系。這一理論所研究的不是魯賓遜飄流在無人島上的行動, 而是現實社會中彼此相互影響的各種活動的合理規律。當然可以想象, 這一理論對於人類與自然界的鬥爭, 社會經濟活動, 軍事作戰等方面都能應用。但是, 從實際問題中抽象出來的博奕理論, 在應用於實際問題時, 由於現實情況遠較博奕模型為複雜, 因此還有很大困難。所以在開始時, 博奕論似乎並沒有重大的現實意義。

儘管如此, 人們把難以掌握的競爭活動的本質加以抽象化, 終究是一項重要的成果。自從 1947 年到現在, 又過去十餘年了。在這期間, 隨著科學技術的迅速發展, 博奕論也越來越與現實問題相接近。由於大型電子計算機的建立, 高速計算工具的發展使複雜的博奕問題逐步具備求解的可能性。

1950 年出版了 “Contributions to the Theory of Games” 第 1 卷 (Annals of Math. Studies, Princeton), 1953 年出版了第 2 卷, 1957 年出版了第 3 卷, 現在第 4 卷亦已出版。特別是, 由於最近運籌學的迅速發展, 正表明博奕論在逐步發揮它的真正作用。此外, 在 1957 年末, Luce 和 Raiffa 合寫了 “Games and Decisions” 一書, 其中有詳細的文獻目錄, 大有參考價值。

在博奕論正取得顯著發展的時期, 這本小冊子的問世似乎是

适时的。作者认为 2 人零和博弈是最基本的, 所以是要写的一个重点。但如不先明确效用的理论, 就似乎很难讲透, 因此先对效用作了简洁的介绍。

要想从基本的一直介绍到现代成果, 即使仅就 2 人博弈而论也要占去很多的篇幅, 何况  $n$  人博弈与非零和博弈的研究已远较 1947 年时期有了更大的发展。如果不接触到这些内容, 又显示不出反映现代博弈理论的意图。因此, 这里仅对博弈论中的合作关系以及 Nash 的理论作了一般性的介绍, 开始接触到近代的理论。

最后, 希望通过数学家和实际工作者的合作, 大大促进博弈论的研究。

宫泽光一

1958 年 1 月

# 目 录

出版說明

序

第 1 章	博弈的构造 .....	1
§ 1	博弈的規則 .....	1
§ 2	博弈的树 .....	2
§ 3	优序 .....	5
§ 4	效用函数 .....	8
§ 5	博弈的展开型及正規型 .....	13
第 2 章	2 人零和博弈 I (純策略范围) .....	18
§ 6	2 人零和博弈 .....	18
§ 7	矩陣博弈的解 .....	20
§ 8	完全信息博弈 .....	25
第 3 章	2 人零和博弈 II (混合策略的引入) .....	29
§ 9	混合策略 .....	29
§ 10	矩陣博弈的基本定理 .....	34
§ 11	矩陣博弈的基本解 .....	39
§ 12	2 人无限零和博弈 .....	50
第 4 章	非零和博弈 .....	58
§ 13	非合作 $n$ 人博弈 .....	58
§ 14	合作 2 人博弈 .....	65
§ 15	交涉 2 人博弈 .....	71
参考文献	.....	80

# 第1章 博弈的构造

## §1 博弈的规则

考虑由几个行动主体参加的竞争。各主体都希望根据自己选定的方式来决定使自己能收到最大效果的行动方针。所谓竞争，其意义就是各主体行动的结果不仅取决于自己的行动，而且还取决于其他主体的行动。同时，各主体的目的必须是互不相容或相互对抗的。在这种情况下，各主体的最好行动是什么，以及当各主体采取了在某种意义下最好的行动时，事态通过怎样的形式才能稳定，所有这些问题用数学方法来加以阐明，这就是 von Neumann 和 Morgonstern<sup>[1]</sup> 所创始的博弈理论。为此，有必要将支配竞争的因素加以抽象化，并将这些因素的相互关系表为数学模型。由于室内游戏可看作是竞争的最简单例子，在此试先把它博弈模型化。

博弈是以几组规则作为特征的。它的规则中首先是指出参加博弈的主体（称为局中人）的数目，同时要指出步法（move）的序列。步法有两种：(i) 某特定局中人在允许的选择事项（alternatives）中决定选择其中一个而得的步法（如在奕棋中走一步棋子），(ii) 不由局中人而由某一特定的机遇装置机械地从选择事项中选定一项的步法（如在桥牌游戏中分给各局中人一定的牌数）。前者称为人的步法（personal move），后者称为机遇步法（chance move）。在人的步法时，选出的选择事项称为着（choice），在机遇步法中出现的选择事项称为运（outcome）。

博弈的规则构成如下：对于步法，要求（a）指出是人的步法还是机遇步法；（b）若是人的步法，指出哪个局中人所选择的步法



以及当时允许选择事项的集合是什么；(c)若是机遇步法，指明可能出现的运的集合以及各运能出现的概率。象这样，若直到第 $(k-1)$  ( $k \geq 1$ )步法以前的所有步法都已经指明时，下一步对于作为前 $(k-1)$ 个步法的着和运的函数的第 $k$ 步法，要指出：(a)第 $k$ 步法是人的步法还是机遇步法；(b)若为机遇步法，可能出现的运的集合和运出现的概率如何；(c)若为人的步法，可选择事项的集合如何，是哪个局中人的步法，另外还要指出局中人选择这一着时，一切能够获得的关于前 $(k-1)$ 个步法中所实现的着和运的信息。

最后，博弈的规则还要指出每个步法作为着与运的函数，博弈在何时終了，博弈在終了时，其成果是甚么。这里总假定博弈经过有限次的步法終了。根据以上的博弈规则，博弈到終了的某一次具体实现称为局(play)。

## §2 博弈的树

博弈可用图形表示。设局中人 $i$ 的某个步法允许在三个选择事项中进行选取。将各选择事项用由同一点出发，方向向上而端点在同一水平上的线段表示，此时这个步法的状态如图2.1。但是各步法用图2.1的图形表现时，博弈步法的意义是不明显的。博弈各个步法的意义主要在于它和其他步法的结合关系。因此各步法除用图2.1表示外，还必须表示各步法的着或者运与其他步法的结合关系。这样，博弈可用图2.2所示依次向上的线段的连接

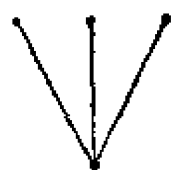


图 2.1

体表示之。在此，各支点只由一个分支与低一级的一个支点连接，最低的支点只有一个，它表示第一步法。这样的图形称为**博弈的树** (game tree)。各等高排列的支点表示各个步法，由下而上顺次称为第一步法，第二步法等等。各支点所标的数字 $1, 2, \dots, n$ 表示其步

一步法，第二步法等等。各支点所标的数字 $1, 2, \dots, n$ 表示其步

法是人的步法，且分别为局中人 1, 2,  $\dots$ ,  $n$  的步法。支点所标的数字若是 0，则表示其为机遇步法。这样，在这个树上，分支终点的各点（即由此不再有分支的点称为树的**顶点**）表示博弈的终结。

我们根据博弈的树来看一下图 2.2 所表示的博弈。第一步法是机遇步法，在此处假定由指定的机遇装置得出的运是  $b$ 。第二

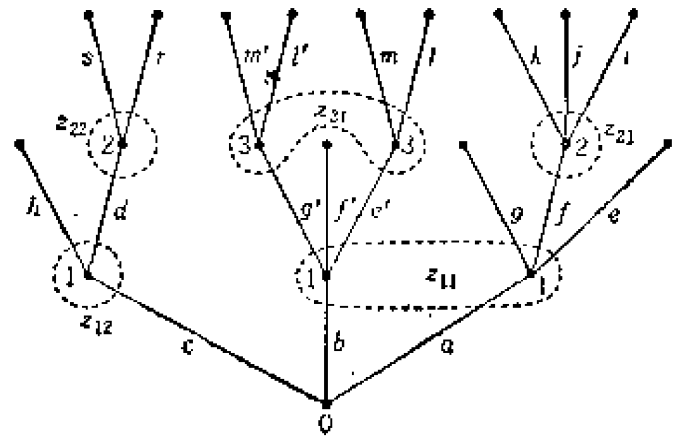


图 2.2

步法是局中人 1 的步法。若局中人选取  $f'$ ，则局终结。若局中人 1 选取  $e'$ ，则第三步法是局中人 3 的步法，在此，局中人 3 选取  $l$  或  $m$  而局终结。

这样，博弈的各局在博弈树上就表现为由最低的唯一的支点出发，经一些路线而到达各分支的顶点，而且这样的路线和博弈树的顶点是一一对应的。因此，博弈的可能的局的数目，就等于博弈树的顶点的数目。例如图 2.2 的树所表示的博弈，其局的总数是 13。

其次，各局中人在选择他的步法时，根据博弈的规则，对于以前局中的过程持有一定的信息。这信息也希望能在图上表示。我们看一下图 2.2，把相当于人的步法的支点全体的集合分成用点线围成的子集合  $z_{11}$ ,  $z_{12}$ ,  $z_{21}$ ,  $z_{22}$  和  $z_{31}$ 。这些子集合  $z_{ij}$  的全体用  $Z$  表示。例如支点集合  $z_{11}$  的意义是：局中人 1 知道第一步法取  $a$  或  $b$  时，第二步法是局中人 1 的步法，但是他所知道的也仅限于此，因为他不能知道第一步法到底取  $a$  还是取  $b$ ，所以也不知道自己现在位于第二步法的哪一点上，也就是说，他还不能判断自己位于集合  $z_{11}$  所含两个支点中的哪一个上。但这时局中人 1 知道在此

步法上自己可选取的事项是  $e, f$  和  $g$  三个。在集合  $z_{11}$  的另一支点, 有用  $e', f', g'$  表示的可选取的分支, 作为选择事项来说, 规定  $e=e', f=f', g=g'$ 。这里对另一个选择事项标以“'”, 只是为了表示它是由不同的支点生出的。 $z_{11}$  含有两个支点, 如前所述, 在第二步法, 局中人 1 仅知道第一步法取  $a$  或  $b$ , 但究竟取其中的哪一个是不知道的, 从而局中人 1 不能判断  $e$  和  $e', f$  和  $f', g$  和  $g'$ 。也就是说, 他只知道现在或是位于分支  $a$  的终止支点, 要在  $e, f, g$  中进行选择, 或是位于分支  $b$  的终止支点, 要在  $e', f', g'$  (即图中的  $e', f', g'$ ) 中进行选择。支点集合  $z_{12}$  仅有一个支点, 这是说局中人 1 完全知道第一步法取  $c$ , 第二步法是局中人 1 的步法, 并且同时表示位于这个步法的局中人 1 的可选择事项是  $d$  或  $h$ 。其他集合  $z_{ij}$  所表示的意义也相同。

这样, 对应于人的步法的支点全体的集合所分成的子集合  $z_{ij}$ , 可以表示博弈规则所给出的信息。这种集合  $z_{ij}$  称为**信息集合** (information set)。信息集合中所含的支点愈多, 信息愈少; 支点愈少, 信息愈多。例如信息集合  $z_{21}$  仅含有一个支点, 所以这时, 在此步法的局中人 2 完全知道第一步法取  $a$ , 第二步法取  $f$ , 现在自己是处于第三步法上, 且将从  $i, j, k$  中进行选择。也就是信息集合  $z_{21}$  表示了局中人 2 知道自己位于这个步法, 以及关于局的以前过程的完全信息。若某个博弈的所有信息集合都只有一个支点, 这种博弈特别地称为**完全信息博弈** (perfect-information game) (如象棋, 围棋等)。

博弈树中对应于人的步法支点全体的集合的任一分割  $Z = \{z_{ij}\}$ , 要使其具有信息集合的性质, 必须满足一定的条件。我们要求的条件是: (1) 信息集合  $z_{ij}$  所含的各支点属于同一局中人  $i$  的步法; (2) 同一集合中各支点分出的分支数目相等; (3) 任何信息集合  $z_{ij}$  不能含有一个局的两个不同步法的支点, 也就是, 设  $v_1$

含于  $z_{ij}$  中, 若支点  $v_2$  可由  $v_1$  沿着博弈树的一条路线到达, 则  $v_2$  不含于  $z_{ij}$  中。(另外必须注意, 将博弈规则表现在树上的方法可以不止一种。)

最后考虑作为博弈构成的另一要素, 即各局结果所带来的局的成果。随着博弈规则的不同, 可能有各种不同的成果。例如财物的输赢, 或单纯决定胜负等等。博弈树的各顶点是局的可能终局点, 这些点指出了相应的博弈的局。一般, 以  $t$  表示这些博弈树的顶点。博弈规则还要求指出顶点集合  $\{t\}$  与可能的成果集合  $\Omega = \{\omega\}$  之间的一一对应关系, 用  $\omega(t)$  表示。

这样, 我们可列出局中人数为  $n$  的博弈(称为  $n$  人博弈)的规则如下:

- (i) 表示出各步法到其他步法的连接关系的树。
- (ii) 相当于机遇集合的支点和相当于人的步法的支点, 以及后一集合的信息集合分割。
- (iii) 相当于机遇步法的支点  $0$  的所有可能运(即分支)的集合(表现在博弈树上), 以及其上的概率分布。
- (iv) 给出含于信息集合中各支点上的可能着(即分支)的集合(表现在博弈树上)。
- (v) 给出成果集合  $\Omega$ , 以及各局(即博弈树的各顶点  $t$ )与  $\Omega$  中元素对应的函数  $\omega(t)$ 。

### §3 优 序

我们在前节叙述了博弈的规则可用博弈树来表示, 可是并未谈到博弈中局中人的作用。当然在提到人的步法是哪个局中人的步法时必须提出局中人来, 但没有涉及作为能使局进行的原动力, 即局中人的行动意图。只有明确了这个问题, 博弈才可以进行。事实上, 对于同一规则的博弈, 如果参加博弈的局中人的行动方针

不同,則竞争結果將有很大的差异。因此必須討論各局中人對於局的成果的擇优形式的問題。

設  $\Omega$  是成果  $\omega$  的集合,机遇裝置使其中有限个元素  $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$  出現的概率为  $p_1, p_2, \dots, p_n$  (在此  $p_i \geq 0, \sum p_i = 1$ )。或者將概率分布称为**賭**(gamble),用  $F$  或  $F = \sum p_i \omega_i$  表示。特別給元素  $\omega$  出現的概率为 1 的賭,用  $\omega$  表示。令  $\Psi$  为賭的全体的集合,同时假定某个特定的主体對於  $\Psi$  的各元素的賭,有滿足下面条件的次序关系  $\succeq$ :

条件(i) (a) 对任意的  $F_1, F_2 \in \Psi$ ,

$F_1 \succeq F_2$  或者  $F_2 \succeq F_1$ ; (两者也可同时成立。)

(b)  $F_1 \succeq F_2$  且  $F_2 \succeq F_3$ , 則  $F_1 \succeq F_3$ 。

此处关系  $F_1 \succeq F_2$  (或者写作  $F_2 \preceq F_1$ ) 或者表示选取的  $F_1$  比  $F_2$  好,或者表示  $F_1$  和  $F_2$  沒有差別。若  $F_1 \succeq F_2$  而不是  $F_2 \succeq F_1$ , 則选取的  $F_1$  比  $F_2$  好,用  $F_1 \succ F_2$  表示。若  $F_1 \succeq F_2$  且  $F_2 \succeq F_1$ , 則  $F_1$  和  $F_2$  沒有差別,用  $F_1 \sim F_2$  表示之。

很明显下面的各关系(1)至(3)是成立的:

(1) 关系“ $\sim$ ”是等价关系。

(2) 对任意的  $F_1, F_2 \in \Psi$ , 关系  $F_1 \succ F_2, F_2 \succ F_1$  或  $F_1 \sim F_2$  中必有一个成立。

(3) 若  $F_1 \succ F_2$  且  $F_2 \succeq F_3$ , 則  $F_1 \succ F_3$ 。

有限个賭  $F_j$  ( $j=1, 2, \dots, k$ ), 可以按下面的意义組合起来:  
設

$$F_j = \sum_i p_{ij} \omega_{ij} \quad (j=1, 2, \dots, k),$$

$\sigma_j$  ( $j=1, \dots, k$ ) 是滿足  $\sigma_j \geq 0, \sum \sigma_j = 1$  的任意实数。 $F_j$  ( $j=1, \dots, k$ ) 的組合用  $\sum \sigma_j F_j$  表示,用下式(3.1)定义所給的賭:

$$\sum_j \sigma_j F_j = \sum_i \sum_j (\sigma_j p_{ij}) \omega_{ij}. \quad (3.1)$$

由  $\omega_{ij} \in \Omega$ ,  $\sigma_j p_{ij} \geq 0$ ,  $\sum_i \sum_j (\sigma_j p_{ij}) = 1$ , 容易看出它是赌。

联系着赌的组合, 假定下面条件:

条件(ii) 设  $F, G, H \in \mathcal{P}$ ,  $0 < \rho \leq 1$ , 若  $F \preceq G$ , 则

$$\rho F + (1-\rho)H \preceq \rho G + (1-\rho)H \quad (3.2)$$

(在此  $\preceq$  表示, 若  $F < G$ , 则 (3.2) 也是  $<$ , 若  $F \sim G$ , 则 (3.2) 也是  $\sim$ ).

条件(iii) 对于  $F_1, F_2, F_3 \in \mathcal{P}$ , 若  $F_1 < F_2 < F_3$ , 则存在  $0 < \lambda < 1$ ,  $0 < \mu < 1$  的实数  $\lambda, \mu$ , 满足下面条件:

$$\lambda F_1 + (1-\lambda)F_3 < F_2, \quad (3.3)$$

$$\mu F_1 + (1-\mu)F_3 > F_2. \quad (3.4)$$

关于赌的优序关系在以上条件(i)至(iii)的假定下, 得出下面的诸结果。

**定理 3.1** 若  $F \sim F'$ ,  $G \sim G'$ , 则对于任意实数  $\rho$ ,  $0 \leq \rho \leq 1$ , 下面关系成立:

$$\rho F + (1-\rho)G \sim \rho F' + (1-\rho)G'. \quad (3.5)$$

**证明** 由条件(ii),

$$\rho F + (1-\rho)G \sim \rho F' + (1-\rho)G,$$

且

$$\rho F' + (1-\rho)G \sim \rho F' + (1-\rho)G',$$

所以由关系(1)推知(3.5)成立。

证毕

**定理 3.2** 若  $F < G$  且  $0 \leq \sigma < \rho \leq 1$ , 则

$$\rho F + (1-\rho)G < \sigma F + (1-\sigma)G. \quad (3.6)$$

**证明** 如果  $\sigma \neq 0$ ,  $\rho \neq 1$ , 则可作如下的变换:

$$\begin{aligned} \rho F + (1-\rho)G &= (\rho - \sigma)F \\ &+ \{1 - (\rho - \sigma)\} \left\{ \frac{\sigma}{1 - (\rho - \sigma)} F + \frac{1 - \rho}{1 - (\rho - \sigma)} G \right\}, \\ \sigma F + (1-\sigma)G &= (\rho - \sigma)G \\ &+ \{1 - (\rho - \sigma)\} \left\{ \frac{\sigma}{1 - (\rho - \sigma)} F + \frac{1 - \rho}{1 - (\rho - \sigma)} G \right\}. \end{aligned}$$

因此由条件(ii)推知(3.6)成立。而当  $\sigma=0$  且  $\rho=1$  时, (3.6) 显然成立。 証毕

**定理 3.3** 若  $F_1 \prec F_2$  且  $F_1 \prec G \prec F_2$ , 则存在唯一的实数  $\rho$ ,  $0 < \rho < 1$ , 使

$$\rho F_1 + (1-\rho) F_2 \sim G. \quad (3.7)$$

**証明** 由定理 3.2 和实数的性质, 存在唯一的实数  $\rho_0$ , 满足下面条件:

$$\lambda F_1 + (1-\lambda) F_2 \prec G, \text{ 当 } 1 \geq \lambda > \rho_0 \text{ 时}, \quad (3.8)$$

$$\mu F_1 + (1-\mu) F_2 \succ G, \text{ 当 } 0 \leq \mu < \rho_0 \text{ 时}, \quad (3.9)$$

所以若存在使(3.7)成立的实数  $\rho$ , 那么这个数非是  $\rho_0$  不可。现在証明

$$H \equiv \rho_0 F_1 + (1-\rho_0) F_2 \sim G. \quad (3.10)$$

若(3.10)不成立, 则  $H \prec G$  或  $H \succ G$ . 现设  $H \prec G$ , 那末取  $0 < \mu < \rho_0$  的任意实数  $\mu$ , 由(3.9),

$$K \equiv \mu F_1 + (1-\mu) F_2 \succ G. \quad (3.11)$$

所以  $H \prec G \prec K$ , 由条件(iii), 存在实数  $\lambda$ ,  $0 < \lambda < 1$ , 使

$$\lambda H + (1-\lambda) K \prec G,$$

即

$$[\lambda \rho_0 + \mu(1-\lambda)] F_1 + \{1 - [\lambda \rho_0 + \mu(1-\lambda)]\} F_2 \prec G. \quad (3.12)$$

但  $0 < \lambda \rho_0 + \mu(1-\lambda) < \rho_0$ , 因而(3.12)的成立和  $\rho_0$  的性质(3.9)相矛盾, 故不可能是  $H \prec G$ . 同样也可証明不可能是  $H \succ G$ . 从而(3.10)成立。 証毕

## §4 效用函数

本节探讨在第3节中所述的赌的优序关系如何用数的大小表示的问题。

**定义 4.1** 所谓某主体的效用(utility)(或效用函数)  $U$ , 是定

又在成果集合  $\Omega = \{\omega\}$  上的有界实函数, 对于任意的两个赌  $F_1 = \sum p_{1i}\omega_{1i}$  和  $F_2 = \sum p_{2j}\omega_{2j}$ , 关系  $F_1 \preceq F_2$  与

$$\sum_i p_{1i}U(\omega_{1i}) \leq \sum_j p_{2j}U(\omega_{2j}) \quad (4.1)$$

等价。

对于任意的赌  $F = \sum p_i\omega_i$ , 数值  $\sum p_iU(\omega_i)$  称为  $F$  的期望效用 (expected utility), 或者简称为赌  $F$  的效用, 用  $U(F)$  表示。所以 (4.1) 的条件可写为  $U(F_1) \leq U(F_2)$ 。

问题在于这样性质的效用函数  $U$  是否存在, 如果存在的话又有多少个, 以及它们之间成立怎样的关系。为了证明存在定理的方便, 按照下面的顺序进行思考。首先, 明显地成立着下面的定理:

**定理 4.1** 设  $\Omega$  上的效用函数  $U$  存在, 并设  $\alpha, \beta$  为任意实数。对于  $\alpha > 0$ , 函数

$$U' = \alpha U + \beta \quad (4.2)$$

也是效用函数。(这个效用函数  $U'$  称为效用函数  $U$  用正一次变换所得的效用函数。)

由定理 4.1 可直接推出下面的系:

**系 4.1** 当效用函数存在, 若  $F, G$  是两个赌, 且  $F \prec G$ , 则对于任意两个实数  $a, b$  ( $a < b$ ), 存在效用函数  $U$ , 使得

$$U(F) = a, \quad U(G) = b.$$

定理 4.1 是说效用的任意增线性函数仍是效用。下面定理 4.2 是说它的逆定理也成立, 即任意的两个效用函数, 互为增线性函数, 亦即一个是另一个的正一次变换。

**定理 4.2** 设  $U$  和  $U'$  是  $\Omega$  上的两个效用函数, 则存在两个实数  $\alpha, \beta$ , 且  $\alpha > 0$ , 使

$$U' = \alpha U + \beta. \quad (4.3)$$

**证明** 首先证明对于任意的三个成果  $\omega_1, \omega_2, \omega_3 \in \Omega$ , 下面的恒等式 (4.4) 成立:



$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ U(\omega_1) & U(\omega_2) & U(\omega_3) \\ U'(\omega_1) & U'(\omega_2) & U'(\omega_3) \end{vmatrix} = 0. \quad (4.4)$$

若成果  $\omega_1, \omega_2, \omega_3$  中有任意两个相等, 则 (4.4) 左边的行列式有二列相等, 从而 (4.4) 成立。如果不是这样, 不失一般性, 假定  $\omega_1 < \omega_2 < \omega_3$ , 则由定理 3.3 可知, 存在着实数  $\rho, 0 < \rho < 1$ , 使

$$\rho\omega_1 + (1-\rho)\omega_3 \sim \omega_2.$$

由此, 根据效用函数的定义,

$$\begin{aligned} 1 &= \rho \cdot 1 + (1-\rho) \cdot 1, \\ U(\omega_2) &= \rho U(\omega_1) + (1-\rho)U(\omega_3), \\ U'(\omega_2) &= \rho U'(\omega_1) + (1-\rho)U'(\omega_3). \end{aligned} \quad (4.5)$$

从而 (4.4) 左边行列式的第 2 列是第 1 列与第 3 列的线性组合, 所以 (4.4) 成立。

现在将  $\omega_1, \omega_2$  看作是任意的固定的  $\omega_1 < \omega_2$  的成果, 对任意的成果  $\omega_3 \in \Omega$ , 展开等式 (4.4), 可得下面的等式:

$$\begin{aligned} [U(\omega_1)U'(\omega_2) - U'(\omega_1)U(\omega_2)] - U(\omega_3)[U'(\omega_2) \\ - U'(\omega_1)] + U'(\omega_3)[U(\omega_2) - U(\omega_1)] = 0, \end{aligned}$$

因此关系式

$$\begin{aligned} U'(\omega_3) &= \frac{U'(\omega_2) - U'(\omega_1)}{U(\omega_2) - U(\omega_1)} U(\omega_3) \\ &\quad - \frac{U(\omega_1)U'(\omega_2) - U'(\omega_1)U(\omega_2)}{U(\omega_2) - U(\omega_1)} \end{aligned} \quad (4.6)$$

对任意的  $\omega_3 \in \Omega$  都成立, 同时 (4.6) 右边  $U(\omega_3)$  的系数的分子分母都是正的, 所以定理得证。 証毕

由定理 4.2 可直接得出下面的系。

**系 4.2** 若  $\Omega$  上的二个效用函数  $U$  及  $U'$ , 对  $\omega_1, \omega_2, \omega_1 < \omega_2$ , 有

$$U(\omega_1) = U'(\omega_1) \text{ 且 } U(\omega_2) = U'(\omega_2),$$

則  $U$  和  $U'$  一致, 即对任意的  $\omega \in \Omega$ ,  $U(\omega) = U'(\omega)$ .

下面给出几个定义:

在赌的集合  $\Psi^*$  上, 对于任意的  $F, G \in \Psi^*$  和任意的实数  $\rho$ ,  $0 \leq \rho \leq 1$ , 如果有  $\rho F + (1-\rho)G \in \Psi^*$ , 則称集合  $\Psi^*$  为凸集。

对两个固定赌  $G, H$ ,  $G \preceq H$ , 满足  $G \preceq F \preceq H$  的  $F$  全体的集合, 称为有端点  $G, H$  的赌的区间。

赌的凸集  $\Psi^*$  上的超效用函数 (hyper-utility function)  $V$  是定义在  $\Psi^*$  上的有界实函数, 并满足下列条件:

(i)  $F, G \in \Psi^*$  时,  $F \preceq G$  和  $V(F) \leq V(G)$  等价。

(ii)  $F, G \in \Psi^*$ ,  $0 \leq \rho \leq 1$  时,

$$V[\rho F + (1-\rho)G] = \rho V(F) + (1-\rho)V(G). \quad (4.7)$$

根据这些定义, 下列各命题是显然的。

(1) 所有赌的集合  $\Psi$  都是凸的。

(2) 赌的两个凸集的交是凸的。

(3) 赌的区间是凸的。另外存在着含有有限个任意的赌的区间。

与推导系 4.1, 4.2 一样, 下面命题成立:

(4) 若赌的凸集  $\Psi^*$  上的超效用函数存在, 当  $F, G \in \Psi^*$ ,  $F \prec G$  时, 只存在唯一的一个超效用函数  $V$ , 使得  $V(F) = 0$ ,  $V(G) = 1$ .

**辅助定理 4.1** 在由任意两个赌  $F_1, F_2$ ,  $F_1 \prec F_2$  所确定的区间  $I$  上, 存在着超效用函数  $V$ .

**证明** 对任意的  $F \in I$ , 由定理 3.3, 只存在一个实数 (用  $V(F)$  表示), 使

$$F \sim (1-V(F))F_1 + V(F)F_2. \quad (4.8)$$

现在证明  $I$  上这样定义的函数  $V$  是区间  $I$  上的超效用函数。

当  $G, H \in I$ ,  $G \preceq H$  时, 由定理 3.2, 3.3 和函数  $V$  的定义,

很明显  $V(G) \leq V(H)$ ，再有

$$G \sim (1-V(G))F_1 + V(G)F_2, H \sim (1-V(H))F_1 + V(H)F_2,$$

所以对任意的  $0 \leq \rho \leq 1$ ，由定理 3.1，下面等式成立：

$$\begin{aligned} \rho G + (1-\rho)H &\sim \rho[(1-V(G))F_1 + V(G)F_2] \\ &\quad + (1-\rho)[(1-V(H))F_1 + V(H)F_2] \\ &= [1 - \{\rho V(G) + (1-\rho)V(H)\}]F_1 \\ &\quad + \{\rho V(G) + (1-\rho)V(H)\}F_2. \end{aligned}$$

因而，由函数  $V$  的定义，

$$V(\rho G + (1-\rho)H) = \rho V(G) + (1-\rho)V(H).$$

从而  $V$  是区间  $I$  上的超效用函数。

証毕

**定理 4.3** 成果  $\omega$  的集合  $\Omega$  上，存在着效用函数。

**证明** 将任意的两个成果  $\omega_1, \omega_2, \omega_1 < \omega_2$ ，固定为 1 组。这时由辅助定理 4.1 及超效用函数的性质 (4)，在含有  $\omega_1$  及  $\omega_2$  的任意的赌的区间  $I$  上，只存在一个使  $\omega_1$  及  $\omega_2$  对应的数值分别为 0 和 1 的超效用函数。对于这样的赌所定义的任意两个区间  $I_1$  和  $I_2$ ，设使  $\omega_1$  和  $\omega_2$  对应的数值同时为 0 和 1 的两个超效用函数为  $V_1$  和  $V_2$ 。由于  $I_1 \cap I_2$  是含有  $\omega_1, \omega_2$  的凸集，从而  $V_1$  和  $V_2$  是  $I_1 \cap I_2$  上的两个超效用函数，而且  $V_1(\omega_1) = V_2(\omega_1) = 0, V_1(\omega_2) = V_2(\omega_2) = 1$ 。因而由超效用函数的性质 (4)，在  $I_1 \cap I_2$  上两个超效用函数  $V_1$  和  $V_2$  是一致的。现在以  $F$  为任意的赌，这时含有  $\omega_1, \omega_2$  及  $F$  的赌的区间至少存在一个，在这些区间上使  $\omega_1, \omega_2$  对应的数值分别为 0, 1 的超效用函数，如上面所证明，使  $F$  对应于同一的数值，这数值用  $V(F)$  表示。这样得出了定义在所有赌的集合  $\mathcal{P}$  上的函数  $V$ 。现在证明这个函数  $V$  就是  $\mathcal{P}$  上的超效用函数。

为此，设  $F_1, F_2$  为任意的两个赌， $\rho$  为  $0 \leq \rho \leq 1$  的任意实数。此时，存在着含有  $\omega_1, \omega_2, F_1, F_2$  及  $\rho F_1 + (1-\rho)F_2$  的赌的区间。

由函数  $V$  的定义, 显然  $V$  是这个区间上的超效用函数。因而,  $V[\rho F_1 + (1-\rho)F_2] = \rho V(F_1) + (1-\rho)V(F_2)$  是成立的, 另外  $F_1 \preceq F_2$  和  $V(F_1) \leq V(F_2)$  是等价的, 所以函数  $V$  是  $\mathcal{F}$  上的超效用函数。即  $\mathcal{F}$  上超效用函数  $V$  的存在得到证明。然后用这个函数  $V$ , 定义  $\Omega$  上的函数  $U$  如下:

$$U(\omega) = V(\omega) \quad (\text{对所有的 } \omega \in \Omega), \quad (4.9)$$

那末由超效用函数的定义条件 (i), (ii) 可知, 用 (4.9) 定义的函数  $U$  确是  $\Omega$  上的效用函数。这样, 效用函数的存在得到证明。

## § 5 博奕的展开型及正規型

我們接續第 2 节再回来討論博奕的問題。对于博奕的各局成果  $\omega$  全体的集合  $\Omega$  上的賭, 假定各局中人  $i$  有滿足第 3 节所述条件 (i) 至 (iii) 的优序关系, 从而根据第 4 节所述, 下面事項成立:

(i\*) 对于各局中人  $i (i=1, 2, \dots, n)$ , 存在定义在成果集合  $\Omega$  上的效用函数  $U_i$ 。

另外我們对局中人假定下面事項:

(ii\*) 各局中人, 在博奕的規則外, 完全知道所有局中人的效用函数。

这个假定在將博奕理論应用到現實的競爭上时, 約束过苛。因为每个人对他人的效用函数是不能完全知道的。

最后, 作为局中人的行动原則, 假定如下:

(iii\*) 各局中人是為了获得最大的效用而行动的。

各局中人的行动符合这个假定的說法, 实际上可以考慮为希望在現實的行动上能实现由于效用的导入而确定的优序关系。这个假定常称为局中人行动合理性的假定。

由第 2 节所述的博奕規則 (i) ~ (v) 及本节的假定 (i\*) ~ (iii\*) 所成的体系称为**博奕的展开型** (extensive form)。这个展开型是

表现博弈的本来面貌的最基本的体系。但是通过展开型规定各局中人的最好局的方法,一般是非常困难的。因为即使是简单的室内游戏,也有极复杂的展开型,可以想象在处理上是不容易的。博弈的理论比较重要的作用之一,就是不管具有如何复杂的展开型的博弈,通过策略(strategy)概念的引入,可以将其化为形式极为单纯的所谓正规型(normal form)。下面就来考虑将展开型化为正规型的问题。

当要进行某个博弈时,各局中人对于自己可能出现的所有步法,以及应该选取哪一个选择事项为着,若预先告诉自己的代理人或者公正人后(当然不能被其他局中人知道),即使局中人不在,他的代理人或者公正人,可以按照所给的指示,根据各局中人的意图将各局进行完了。这样,对于上述,把所有可能的步法和着都给指出的对策计划称为策略。

现在形式地来描述一下策略的定义。

在博弈的树上,考虑人的步法上的一个支点 $v$ 。在这个支点 $v$ ,可能的分支(选择事项)有 $r$ 个,这些选择事项用数字 $1, 2, \dots, r$ 表示,其集合为 $S(v)$ 。当某个信息集合 $z$ 中有两个以上的支点 $v_i (i=1, 2, \dots, k)$ 时,根据信息集合的条件(2),各支点 $v_i$ 对应的集合 $S(v_i)$ , ( $i=1, \dots, k$ )认为是同一个(第1节)。从而将这些集合看作是对应于信息集合 $z$ 的选择事项集合,用 $S(z)$ 表示。现在对局中人 $i$ 给出 $q$ 个不同的信息集合,用 $z_{i1}, \dots, z_{iq}$ 表示。我们引入下面定义:

**定义 5.1** 博弈局中人 $i$ 的纯策略(pure strategy)  $\textcircled{1}$  是定义在局中人 $i$ 的信息集合的集合 $\{z_{ij}\}, j=1, \dots, q$ 上的函数 $f_i$ , 且

$$f_i(z_{ij}) \in S(z_{ij}) \quad (j=1, \dots, q).$$

若 $f_i(z_{ij}) = b_{ij} \in S(z_{ij})$  (在此 $b_{ij}$ 是含于 $S(z_{ij})$ 的一个选择事项的编号), 策略 $f_i$ 表示为具有 $q$ 个编号的组 $f_i = (b_{i1}, b_{i2}, \dots, b_{iq})$ 。

$\textcircled{1}$  引入纯策略是为了区别于以后的混合策略。由于我们现在只考虑纯策略, 为了简单起见, 将它简称为策略。

**例 5.1** 考虑图 5.1 的博奕树。第一步法是局中人 1 的步法，局中人 1 在此选择数 1 或者 2 ( $S(z_{11}) = \{1, 2\}$ )，第二步法是机遇步法，在此掷一钱币 ( $S(v_2) = S(v_3) = \{\text{正}, \text{反}\}$ )，即钱币的正或反出现的概率各为  $1/2$ 。第 3 步法是局中人 2 的步法，若第二步法出现正，公正人应该将以前的局的过程完全告诉局中人 2。这样，信息集合  $z_{21}$  及  $z_{22}$ ，都只有一个支点  $v_4$  或  $v_5$ 。在每个步法上局中人 2 允许在数 2, 3, 4 间进行选择。若在第二步法出现反，公正人只告诉局中人 2 出现了反，而不告诉他出现反的经过过程。从而这时局中人 2 的信息集合  $z_{23}$  是由两个支点  $v_6$  及  $v_7$  构成的。局中人 2 可在数 5 或 6 中进行选择，所以  $S(z_{23}) = \{5, 6\}$ 。第四步法又是机遇步法，数 1, 2 出现的概率分别为 0.4, 0.6，到此局告终止。作为终局的成果规定如下：计算第一、第三及第四步法所取数的和  $m$ ，若  $m$  为奇数，则局中人 2 支付给局中人 1 以  $m$  圆，若  $m$  为偶数，则局中人 1 支付给局中人 2 以  $m$  圆。现在研究一下这个博奕中各局中人的策略。

**局中人 1 的策略** 局中人 1 的信息集合仅有一个  $z_{11}$ ，从而局中人 1 所能取的策略，只有函数  $f_{11}$ ， $f_{11}(z_{11}) = 1$  及函数  $f_{12}$ ， $f_{12}(z_{11}) = 2$  两个。或者也可将其表示为  $f_{11} = (1)$ ， $f_{12} = (2)$ 。

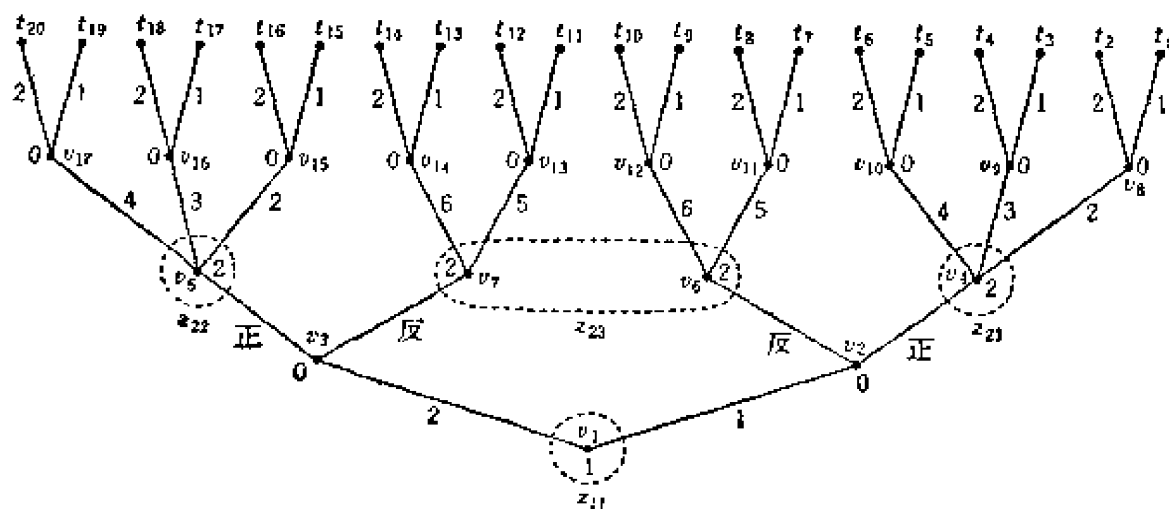


图 5.1

**局中人2的策略** 局中人2的信息集合是 $z_{21}$ ,  $z_{22}$ 及 $z_{23}$ 三个,从而在其上定义的函数,例如下面的函数 $f_{21}$ 是局中人2的一个策略,  $f_{21}(z_{21}) = 2 \in S(z_{21})$ ,  $f_{21}(z_{22}) = 4 \in S(z_{22})$ ,  $f_{21}(z_{23}) = 5 \in S(z_{23})$ . 这个策略 $f_{21}$ 也可用 $f_{21} = (2, 4, 5)$ 表示。因此局中人2的策略全部是 $3 \times 3 \times 2 = 18$ 个。

于是在一局博奕中,设局中人1,2分别采取策略 $f_{11} = (1)$ ,  $f_{21} = (2, 4, 5)$ , 这时即使局中人不在现场,由公正人代理也能一样地进行。首先在第一步法局中人1取数1,第二步法投掷钱币出现正,第三步法局中人取数2,机遇步法的第四步法出现数1(概率为0.4),到此一局终止。这个局中第一、三、四步法所取的数字之和 $1+2+1=4$ 是偶数,所以此局的成果是局中人1支付给局中人2四圆。

若博奕不含有机遇步法,当各局中人分别选定一个策略时,它所对应的局的成果,显然是唯一确定的。但是如例5.1,若有机遇步法时,各局中人虽然分别选定了策略,可是博奕的局完全依赖于机遇步法出现的结果,从而博奕的局的成果就不能唯一确定。例如上例的局,实现的概率是 $0.5 \times 0.4 = 0.2$ ,换句话说,就是在这场博奕中,局中人1,2分别采取策略 $f_{11} = (1)$ 及 $f_{21} = (2, 4, 5)$ 时,这局到达终点 $t_1$ 的概率是0.2。同样可确定到达任意顶点 $t_i$ 的局的概率。例如到达顶点 $t_2$ ,  $t_3$ 的概率分别是 $0.5 \times 0.6 = 0.3$ ,  $0.5 \times 0 = 0$ 等等。

这样,对一般的博奕,局中人1, 2,  $\dots$ ,  $n$ 分别取一个策略 $f_1$ ,  $f_2$ ,  $\dots$ ,  $f_n$ 时,可以确定对应于策略组 $f = (f_1, f_2, \dots, f_n)$ , 到达博奕的树的任意顶点 $t$ 的局的概率,用 $p(f; t)$ 表示。换句话说,可确定对应于各局中人取的策略组 $f = (f_1, \dots, f_n)$ 在博奕的树的顶点集合 $T = \{t\}$ 上的概率分布 $p_f$ 。可是博奕的局在顶点 $t$ 终止时,得出局的成果 $\omega(t) \in \Omega$ 。从而 $T$ 上的概率分布 $p_f$ ,诱导出局的成

果集合  $\Omega = \{\omega\}$  上的概率分布  $\pi_i$ , 也就是說, 各局中人取的策略組  $f = (f_1, \dots, f_n)$  对应于  $\Omega$  上的概率分布  $\pi_i$ . 由博奕的条件 (i) 可确定  $\pi_i$  对于局中人  $i$  的期望效用  $U_i(\pi_i)$ . 以后期望效用  $U_i(\pi_i)$  可写为  $M_i(f)$  或  $M_i(f_1, \dots, f_n)$ , 即

$$M_i(f_1, \dots, f_n) = \sum_{\omega} U_i(\omega) \pi_i(\omega) \quad (i=1, 2, \dots, n). \quad (5.1)$$

如此, 当局中人  $1, 2, \dots, n$  分別取策略  $f_1, f_2, \dots, f_n$  时, 根据博奕的規則, 可确定对于局中人  $i$  (成果上的概率分布的) 的效用  $M_i(f_1, \dots, f_n)$ ,  $i=1, 2, \dots, n$ . 此效用  $M_i(f)$  称为局中人  $1, 2, \dots, n$  取策略  $f_1, f_2, \dots, f_n$  时的局中人  $i$  的**赢得**(payoff). 作为策略  $f_i, i=1, \dots, n$  的函数  $M_i$  称为**赢得函数**(payoff function)。

从以上的考察, 具有任何展开型的博奕, 由于策略概念的引入, 可以表示成下面整理后的形式:

- (1) 給出局中人  $i$  可取得的策略  $f_i$  的集合  $F_i (i=1, 2, \dots, n)$ .
- (2) 給出博奕的局的成果  $\omega$  的集合  $\Omega$ .
- (3) 确定对应于各局中人所取的策略的任意組  $f = (f_1, \dots, f_n), f_i \in F_i$ , 在  $\Omega$  上的概率分布  $\pi_i$ .
- (4) 博奕的局可按下面所述进行: 即各局中人可在不知道其他局中人所取的策略的情况下, 同时选取一个策略  $f_i \in F_i (i=1, \dots, n)$ .
- (5) 局中人  $i$  可获得 (5.1) 定义的赢得  $M_i(f)$ , 这时局告終止。

上面的表示形式称为博奕的**正规型** (normal form)。可表示成  $G = (F_1, \dots, F_n; M_1, \dots, M_n)$ . 今后主要是研究正规型的博奕。



## 第2章 2人零和博弈 I (純策略範圍)

### §6 2人零和博弈

在局中人的数目  $n$  超过 2 的一般  $n$  人博弈中, 有局中人相互間完全不許可合作的情况(非合作博弈)和局中人为了获得共同利益許可相互合作的情况(合作博弈)。对于前者, 可以用 2 人博弈中的平衡概念, 使其一般化。后者可以将  $n$  个局中人分为两群, 由于每群局中人的相互結合, 問題就归結为 2 人博弈的对抗状态。因此, 为了研究一般的  $n$  人博弈, 必須首先研究 2 人博弈。同时在实际問題中, 两个主体間相互对抗的情况也非常多, 所以 2 人博弈就其本身來說, 也有重要的研究价值。本章是以 2 人博弈为研究对象。

茲討論 2 人博弈的正規型。局中人 1 有  $m$  个策略, 記为  $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ , 局中人 2 有  $n$  个策略, 記为  $\beta_1, \dots, \beta_n$ , 它們的集合分別用  $F_1 \equiv A = \{\alpha_1, \dots, \alpha_m\}$ ,  $F_2 \equiv B = \{\beta_1, \dots, \beta_n\}$  表示。局中人 1, 2 分別取策略  $\alpha_i, \beta_j$  时, 局的成果  $\omega$  的集合  $\Omega$  上的概率分布記为  $\pi_{ij}$ 。这种各局中人策略的数目是有限的 2 人博弈, 可用表 6.1 的

	$\beta_1$	$\beta_2$	$\dots$	$\beta_n$
$\alpha_1$	$\pi_{11}$	$\pi_{12}$	$\dots$	$\pi_{1n}$
$\alpha_2$	$\pi_{21}$	$\pi_{22}$	$\dots$	$\pi_{2n}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\alpha_m$	$\pi_{m1}$	$\pi_{m2}$	$\vdots$	$\pi_{mn}$

表 6.1

矩陣表示。

对各概率分布  $\pi_{ij}$ , 局中人 1, 2 分別有它的优序。如果两局中人的优序一样, 問題就沒有研究的必要。因为这时  $\pi_{ij}$  中对局中人 1 与局中人 2 來說最有利的(或者最优的)是同一个东西, 記为  $\pi_{i_0 j_0}$ 。从而这时局中人 1, 2 分別取策略  $\alpha_{i_0}, \beta_{j_0}$  是最优的, 这时他們之間沒有对抗。另外一种情况是两个局中人的优序完全相反, 也就是若局中人  $\mu$  选取  $\pi_{ij}$  比选取  $\pi_{kl}$

好时,局中人 $\nu$ 选取 $\pi_{hk}$ 比选取 $\pi_{ij}$ 好,若对于局中人 $\mu$ 来说 $\pi_{ij}$ 和 $\pi_{hk}$ 没有差别,则对于局中人 $\nu$ 来说也是一样,这里 $\mu, \nu=1, 2$ . 这种情况的博弈称为**严格的对抗** (strictly competitive). 在本章就是研究严格对抗的2人博弈。

在严格对抗的2人博弈中,若 $M_1(\alpha_i, \beta_j) > M_1(\alpha_h, \beta_k)$ , 则 $M_2(\alpha_i, \beta_j) < M_2(\alpha_h, \beta_k)$ , 反之也成立。从而在这样的博弈中,局中人1希望的局势是得到大的 $M_1(\alpha_i, \beta_j)$ , 也就是小的 $M_2(\alpha_i, \beta_j)$ , 局中人2希望的是大的 $M_2(\alpha_i, \beta_j)$ , 也就是小的 $M_1(\alpha_i, \beta_j)$ . 局中人根据上述的愿望来考虑决定他的策略。从而,在研究局中人1, 2取什么样的策略为最优的问题时,首先假定

$$M_2(\alpha_i, \beta_j) = -M_1(\alpha_i, \beta_j) \quad (i=1, \dots, m; j=1, \dots, n), \quad (6.1)$$

而且局中人1努力使 $M_1(\alpha_i, \beta_j)$ 大, 局中人2努力使 $M_1(\alpha_i, \beta_j)$ 小来进行讨论。由于(6.1)成立,也就是

$$M_1(\alpha_i, \beta_j) + M_2(\alpha_i, \beta_j) = 0 \quad (i=1, \dots, m; j=1, \dots, n) \quad (6.2)$$

成立, 因此,称这种博弈为**2人零和博弈** (zero-sum two-person game)。很明显, 2人零和博弈是严格对抗的2人博弈。以后我们将严格的对抗博弈和零和博弈看作同义词使用。在本章仅考察2人零和博弈。

在2人零和博弈中,局中人2的赢得函数 $M_2$ , 由(6.1), 可用局中人1的赢得函数 $M_1$  (可写为 $M$ ) 完全确定。因此, 2人零和博弈的正规型, 可由指定的 $A, B$  及 $M$  完全规定下来。这样, 博弈可以表示成 $G=(A, B, M)$ . 或者设

$$M_1(\alpha_i, \beta_j) = a_{ij}, M_2(\alpha_i, \beta_j) = b_{ij} \quad (i=1, \dots, m; j=1, \dots, n), \quad (6.3)$$

在2人零和博弈中,

$$a_{ij} + b_{ij} = 0 \quad (i=1, \dots, m; j=1, \dots, n), \quad (6.4)$$

博弈也可以用以局中人1的赢得 $a_{ij}$ 为元素的矩阵

$$(a_{ij}) \quad (i=1, \dots, m; j=1, \dots, n) \quad (6.5)$$

完全规定下来。这个矩陣  $(a_{ij})$  称为 2 人零和博弈的**贏得矩陣**。在这个意义下,各局中人的策略数是有限的 2 人零和博弈(称为有限 2 人零和博弈),也称为**矩陣博弈**(rectangular game)。

## § 7 矩陣博弈的解

由博弈的条件(iii),在矩陣博弈  $(a_{ij})$  中,指导局中人 1 的行动方針是尽量得到大的  $a_{ij}$ ,而指导局中人 2 的行动方針是尽量得到小的  $a_{ij}$ 。但是局中人的行动(策略的选定)所产生的成果必依赖于其他局中人的行动,而且各局中人是在不知道其他局中人的策略的情况下选定自己的策略的。在这种博弈中,各局中人的最优策略就是本节所要研究的課題。

	$\beta_1$	$\beta_2$	$\beta_3$
$\alpha_1$	10	0	-3
$\alpha_2$	-2	1	2
$\alpha_3$	3	2	4
$\alpha_4$	5	-3	6

表 7.1

現在考察由表 7.1 的贏得矩陣所給定的矩陣博弈。

**例 7.1** (i) 局中人 1 的观点: 若局中人 1 知道局中人 2 的策略时,他的最优策略由贏得矩陣,可以按表 7.2 直接得出。

若局中人 2 的着是:	$\beta_1$	$\beta_2$	$\beta_3$
对此,局中人 1 的最优策略为:	$\alpha_1$	$\alpha_3$	$\alpha_4$
局中人 1 的贏得为:	10	2	6

表 7.2

上面局中人 1 的最好的着是依局中人 2 的着而确定的。但在实际中,局中人 1 并不知道局中人 2 的策略。若局中人 1 对局中人 2 进行分析,根据某种理由能够推出局中人 2 的某个特定策略,这时局中人 1 可以根据分析的结果采取最优策略。和表 7.2 一样可以作出表 7.3。

若局中人 1 的着是:	$\alpha_1$	$\alpha_2$	$\alpha_3$	$\alpha_4$
对此,局中人 2 的最优策略为:	$\beta_3$	$\beta_1$	$\beta_2$	$\beta_2$
此时局中人 1 的赢得为:	-3	-2	2	-3

表 7.3

对于这样的分析,可以看出,局中人 2 的最优策略,反过来也依赖于局中人 1 的着,当然局中人 2 是不能知道这些依赖关系的。从而局中人 1 (至少是这个分析方法)不能猜出局中人 2 所要取的策略。反之,从局中人 2 的观点来进行讨论,结果也同样,即局中人 2 不能猜出局中人 1 所要取的策略。现在改变考察的方法,引出下面的量。

**定义 7.1** 在矩陣博奕  $(a_{ij})$  上,称

$$\min_j a_{ij}$$

为局中人 1 取策略  $\alpha_i (i = 1, \dots, m)$  时的**安全水准**(security level), 称

$$\min_i [-a_{ij}] = -\max_j a_{ij}$$

为局中人 2 取策略  $\beta_j (j = 1, \dots, n)$  时的**安全水准**。

据此,表 7.3 表示局中人 1 取策略  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  或  $\alpha_4$  时的安全水准分别为 -3, -2, 2 或 -3。从而由表 7.3, 可知策略  $\alpha_3$  使局中人 1 的安全水准最大,这时的安全水准是 2。也就是局中人 1 取策略  $\alpha_3$ , 至少能保证赢得 2, 其他策略不能保证 2 以上的赢得。

(ii) 局中人 2 的观点:表 7.2 表示局中人 2 取策略  $\beta_1, \beta_2$  或  $\beta_3$  时的安全水准分别是 -10, -2 或 -6。其中策略  $\beta_2$  使局中人 2 的安全水准最大。即局中人 2 取策略  $\beta_2$ , 能使局中人 1 的赢得降到 2 以下, 而其他的策略将不可能使局中人 1 的赢得降到 2 以下。

由以上的考察,得出下面的结论:

(a)  $\alpha_3$  使局中人 1 的安全水准最大。

- (b)  $\beta_2$  使局中人 2 的安全水准最大。
- (c) 若局中人 2 取  $\beta_2$ , 对局中人 1 來說  $\alpha_3$  是最优策略。
- (d) 若局中人 1 取  $\alpha_3$ , 对局中人 2 來說,  $\beta_2$  是最优策略。

在此,我們可以认为,这个博弈中局中人 1 取策略  $\alpha_3$ , 同时局中人 2 取策略  $\beta_2$  是两个局中人的最优着。

再看一下局中人 1, 2 的策略組  $(\alpha_3, \beta_2)$  的性质 (c), (d), 它具有下面的意义: 即当局中人 2 保持  $\beta_2$  时, 局中人 1 沒有改变策略  $\alpha_3$  的理由, 同时, 当局中人 1 保持  $\alpha_3$  时, 局中人 2 也沒有改变策略  $\beta_2$  的任何理由。从这个意义來說, 策略組  $(\alpha_3, \beta_2)$  是稳定的。这种策略組称为博弈的平衡点。

**定义 7.2** 在博弈  $G = (A, B, M)$  中, 局中人 1, 2 的策略組  $(\alpha_{i_0}, \beta_{j_0})$ , 滿足下列条件 (i) 和 (ii) 时, 称为博弈  $G$  的平衡点:

- (i)  $M(\alpha_{i_0}, \beta_{j_0}) = \max_{\alpha_i} M(\alpha_i, \beta_{j_0}),$
- (ii)  $M(\alpha_{i_0}, \beta_{j_0}) = \min_{\beta_j} M(\alpha_{i_0}, \beta_j).$

易見条件 (i), (ii) 和下面的条件 (iii) 等价:

- (iii)  $M(\alpha_i, \beta_{j_0}) \leq M(\alpha_{i_0}, \beta_{j_0}) \leq M(\alpha_{i_0}, \beta_j),$   
 $(i=1, \dots, m; j=1, \dots, n).$

博弈  $G = (A, B, M)$  的平衡点  $(\alpha_{i_0}, \beta_{j_0})$ , 在博弈的贏得矩陣  $(a_{ij})$  中对应的元素  $a_{i_0 j_0}$  是第  $i_0$  行的最小值, 同时是第  $j_0$  列的最大值, 即  $a_{i_0 j_0}$  是贏得矩陣  $(a_{ij})$  的鞍点 (saddle point)。

由以上的說明可知, 用平衡点来定义博弈的解是妥当的。

**定义 7.3** 若博弈  $G = (A, B, M)$  的平衡点为  $(\alpha_{i_0}, \beta_{j_0})$ , 則

- (a) 局中人 1, 2 的策略組  $(\alpha_{i_0}, \beta_{j_0})$  称为博弈的解 (solution)。
- (b)  $\alpha_{i_0}$  称为局中人 1 的最优策略 (optimal strategy),  $\beta_{j_0}$  称为局中人 2 的最优策略。
- (c) 值  $M(\alpha_{i_0}, \beta_{j_0})$  称为博弈  $G$  的值 (value)。

其次要研究是否对任意的矩陣博奕都存在平衡点 (即解), 若存在几个平衡点, 那末它們之間的关系又如何。

現在討論关于博奕  $G = (A, B, M)$  的平衡点的性质。

(i) 矩陣博奕的平衡点未必存在。

**例 7.2** 贏得矩陣表 7.4 給定的博奕, 很明显沒有平衡点。因此, 这个博奕不存在我們定义的解, 也就是說不存在各局中人的最优策略。

	$\beta_1$	$\beta_2$
$\alpha_1$	5	2
$\alpha_2$	3	6

表 7.4

关于不具有平衡点的矩陣博奕, 是否在任何意义下都沒有称为解的策略組呢? 現在对这个問題略加說明。在例 7.2 的博奕中, 局中人 1 取  $\alpha_2$  可以確保最大的安全水准 3, 局中人 2 取  $\beta_1$  可確保最大的安全水准 -5, 局中人 2 对于局中人 1 的策略  $\alpha_2$  來說, 取  $\beta_1$  是比取  $\beta_2$  好。因而局中人 1 有充分的理由可以认为局中人 2 取  $\beta_1$ 。經過这样分析, 局中人 1 就要考虑取  $\alpha_1$  而不取  $\alpha_2$  了。另一方面, 局中人 2 从自己角度出发, 推得局中人 1 應該有上述的想法, 这时, 针对局中人 1 的策略  $\alpha_1$ , 他就要取  $\beta_2$  而不取  $\beta_1$ 。假若局中人 1 也能猜出局中人 2 的这种想法的話, 这时他就又要取  $\alpha_2$  了。这样两人互相推測, 只能是循环不已, 两个局中人的稳定策略組是不存在的。这种情况在不存在平衡点的博奕中是常有的。从而我們可认为不存在平衡点的博奕 (至少在目前阶段) 不存在解, 各局中人的最优策略也不存在。

(ii) 存在具有两个以上平衡点的矩陣博奕。

	$\beta_1$	$\beta_2$	$\beta_3$
$\alpha_1$	6	7	6
$\alpha_2$	5	2	3

表 7.5

**例 7.3** 在由表 7.5 給定的博奕中, 策略組

$(\alpha_1, \beta_1)$  和  $(\alpha_1, \beta_3)$  都是平衡点。

(iii) 矩陣博奕  $G = (A, B, M)$  的策略組

$(\alpha_{i_0}, \beta_{j_0})$  和  $(\alpha_{i_1}, \beta_{j_1})$  都是平衡点时, 下列关系

成立:

(a)  $(\alpha_{i_0}, \beta_{j_1})$  和  $(\alpha_{i_1}, \beta_{j_0})$  也都是平衡点。这个性质称为平衡点的可換性。

(b) 在所有的平衡点上, 局中人 1 的贏得相等 (这个定值即博奕的值):

$$M(\alpha_{i_0}, \beta_{j_0}) = M(\alpha_{i_1}, \beta_{j_1}) = M(\alpha_{i_0}, \beta_{j_1}) = M(\alpha_{i_1}, \beta_{j_0}). \quad (7.1)$$

**証明**  $(\alpha_{i_0}, \beta_{j_0})$  是平衡点, 所以

$$a_{i_0 j_0} \leq a_{i_0 j} \leq a_{i_0 j_0}, \quad \text{对所有的 } i, j. \quad (7.2)$$

在此,  $M(\alpha_i, \beta_j) = a_{ij}$ . 同样,  $(\alpha_{i_1}, \beta_{j_1})$  是平衡点, 所以

$$a_{i_1 j_1} \leq a_{i_1 j} \leq a_{i_1 j_1}, \quad \text{对所有的 } i, j. \quad (7.3)$$

由 (7.2), (7.3) 得

$$a_{i_0 j_0} \leq a_{i_0 j_1} \leq a_{i_1 j_1} \leq a_{i_1 j_0} \leq a_{i_0 j_0}.$$

所以 (7.1) 成立, 即 (b) 得証。

再由 (7.1) 和不等式

$$a_{i_1 j_1} \leq a_{i_1 j_0} = a_{i_0 j_0} = a_{i_0 j_1} \leq a_{i_0 j}, \quad \text{对所有的 } i, j,$$

立刻能看出  $(\alpha_{i_0}, \beta_{j_1})$  是平衡点, 所以 (a) 得証。 証毕

(iv) 构成平衡点的各策略, 使各自的局中人的安全水准为最大。

**証明**  $(\alpha_{i_0}, \beta_{j_0})$  为任意的平衡点, 由定义,

$$\begin{aligned} \alpha_{i_0} \text{ 的安全水准} &= \min_j a_{i_0 j} = a_{i_0 j_0} = \max_i a_{i j_0} \\ &\geq a_{i_1 j_0} \geq \min_j a_{i_1 j} = \alpha_{i_1} \text{ 的安全水准}. \end{aligned} \quad (7.4)$$

$$\begin{aligned} \beta_{j_0} \text{ 的安全水准} &= -\max_i a_{i j_0} = -a_{i_0 j_0} = -\min_j a_{i_0 j} \\ &\geq -a_{i_0 j} \geq -\max_i a_{i j} = \beta_j \text{ 的安全水准}. \end{aligned} \quad (7.5)$$

所以得証。

証毕

(v) 矩陣博奕  $G = (A, B, M)$  存在平衡点的充要条件是下面等式成立:

$$\max_i \min_j M(\alpha_i, \beta_j) = \min_j \max_i M(\alpha_i, \beta_j). \quad (7.6)$$

若另有  $(\alpha_{i_0}, \beta_{j_0})$  也为任意的平衡点, 则 (7.6) 的共同值等于  $M(\alpha_{i_0}, \beta_{j_0})$ .

**証明** 必要性: 設  $(\alpha_{i_0}, \beta_{j_0})$  为博奕  $G$  的任意平衡点, 由 (7.4), (7.5), 知

$$a_{i_0 j_0} = \max_i \min_j a_{ij}, \quad (7.7)$$

$$-a_{i_0 j_0} = \max_j (-\max_i a_{ij}) = -\min_j \max_i a_{ij} \quad (7.8)$$

成立。因而由(7.7), (7.8)可知(7.6)成立, 同时它的共同值等于  $M(a_{i_0}, \beta_{j_0}) = a_{i_0 j_0}$ .

充分性: 設  $i_0$  和  $j_0$  使

$$\max_i \min_j a_{ij} = \min_j a_{i_0 j}, \quad \min_j \max_i a_{ij} = \max_i a_{ij_0} \quad (7.9)$$

(这样的  $i_0, j_0$  确实存在), 所以若(7.6)成立, 則

$$\min_j a_{i_0 j} = \max_i a_{ij_0}. \quad (7.10)$$

另一方面, 很明显

$$\min_j a_{i_0 j} \leq a_{i_0 j_0} \leq \max_i a_{ij_0}. \quad (7.11)$$

由(7.10), 所以(7.11)中等式成立, 即  $(\alpha_{i_0}, \beta_{j_0})$  是博奕的平衡点。

証毕

使(7.9)成立的策略  $\alpha_{i_0}$  和  $\beta_{j_0}$ , 分别称为 **maximin 策略** 和 **minimax 策略**。根据(v)的証明, 直接可得出下面結果,

(vi) 若博奕  $G = (A, B, M)$  存在平衡点, 則由局中人1的 maximin 策略和局中人2的 minimax 策略組成的策略組是平衡点。

由上面我們可以看到, 有的矩陣博奕有解, 有的矩陣博奕沒有解。同时也証明了矩陣博奕有解(有平衡点)的充要条件。但是条件(7.6)是就博奕的正規型的贏得矩陣來說的。从博奕的展开型的特征来看, 还不能知道解的存在与否, 但可以知道, 至少当博奕是完全信息博奕时, 解总是存在的, 下面就来証明这个事实。

## § 8 完全信息博奕

完全信息博奕就是博奕树的各信息集合都只有一个支点的博



奕。这也就意味着将任意支点的各分支連起来,就分別成为某个完全信息博弈。从这个事实能使用归納法来定义这种博弈。根据下面的定义,完全信息博弈的次数是指含在博弈中步法的最大数。

**定义 8.1** 在博弈  $G = (A, B, M)$  中,若  $M(\alpha, \beta)$  对所有的  $\alpha \in A, \beta \in B$  都是常数,此博弈称为次数 0 的完全信息博弈,簡記为 P. I. G. 再有,在博弈  $G = (A, B, M)$  中,存在有集合(有限)  $Z$ , 对各个  $z \in Z$ , 对应着次数  $n$  的 P. I. G.,  $G_z = (A_z, B_z, M_z)$ , 記其全体为  $\mathcal{G}$ . 当  $\mathcal{G}$  滿足下列条件时,称博弈  $G$  为次数  $n+1$  的 P. I. G.:

情况 1: 博弈  $G$  的第一步法对应于局中人 1 的步法。 $A$  是所有由  $z \in Z, a \in A_z$  組成的組  $(z, a)$  的全体,  $B$  的各元素  $\beta$  是定义在  $Z$  上的函数,对所有的  $z \in Z$ , 有  $\beta(z) \in B_z$ ; 反之,对任意的  $b_z \in B_z, z \in Z$ , 存在着  $B$  的某个元素  $\beta$ , 对所有的  $z \in Z$ ,

$$\beta(z) = b_z,$$

$$\text{且} \quad M((z, a), \beta) = M_z(a, \beta(z)). \quad (8.1)$$

情况 2: 博弈  $G$  的第一步法对应于局中人 2 的步法。 $B$  是所有由  $z \in Z, b \in B_z$  組成的組  $(z, b)$  的全体,  $A$  的各元素  $\alpha$  是定义在  $Z$  上的函数,对所有的  $z \in Z$ , 有  $\alpha(z) \in A_z$ ; 反之,对任意的  $a_z \in A_z, z \in Z$ , 存在着  $A$  的某个元素  $\alpha$ , 对所有的  $z \in Z$ ,

$$\alpha(z) = a_z,$$

$$\text{且} \quad M(\alpha, (z, b)) = M_z(\alpha(z), b). \quad (8.2)$$

情况 3: 博弈  $G$  的第一步法对应于概率分布  $p$  中的机遇步法。 $A$  与  $B$  的各元素  $\alpha, \beta$  都是定义在  $Z$  上的函数,对所有的  $z \in Z$ , 分別有  $\alpha(z) \in A_z, \beta(z) \in B_z$ ; 反之,对于  $A_z$  与  $B_z$  的任意元素  $a_z, b_z, z \in Z$ , 有  $A$  与  $B$  的各元素  $\alpha, \beta$ , 使

$$\alpha(z) = a_z, \beta(z) = b_z, \quad \text{对所有的 } z \in Z,$$

$$\text{且} \quad M(\alpha, \beta) = \sum_z p(z) M_z(\alpha(z), \beta(z)), \quad (8.3)$$

此处  $p$  是  $Z$  上的某概率分布。

这样,当博奕  $G$  对某个  $n$  是次数  $n$  的 P. I. G. 时,称  $G$  为完全信息博奕。

**定理 8.1** 完全信息博奕  $G = (A, B, M)$ , 总存在平衡点 (即解)。当博奕  $G$  为次数  $n+1$  的完全信息博奕时,相应于定义 8.1 中博奕组 ③ 的三个情况,博奕  $G$  的值  $v_G$  分别由下式给出:

$$\text{情况 1:} \quad v_G = \max_z v_G(z), \quad (8.4)$$

$$\text{情况 2:} \quad v_G = \min_z v_G(z), \quad (8.5)$$

$$\text{情况 3:} \quad v_G = \sum_z p(z) v_G(z), \quad (8.6)$$

此处  $v_G(z)$  是完全信息博奕  $G_z$  的值。

**証明**  $n=0$  时定理显然成立。設問題中的博奕为  $(n+1)$  次 P. I. G., 假定对次数比  $(n+1)$  低的 P. I. G. 定理成立。因而存在  $v_G(z)$ ,  $z \in Z$ 。

情况 1 的証明: 現在設  $z^* \in Z$  是使

$$v \equiv \max_z v_G(z) = v_G(z^*) \quad (8.7)$$

的元素。由假定,博奕  $G_{z^*}$  存在平衡点,設为  $(a_{z^*}^*, b_{z^*}^*)$ , 則

$$v_G(z^*) = M_{z^*}(a_{z^*}^*, b_{z^*}^*). \quad (8.8)$$

現在取  $A$  的元素  $\alpha^* = (z^*, a_{z^*}^*)$ , 再对任意的  $z \in Z$ , 設博奕的平衡点为  $(a_z^*, b_z^*)$ , 則对  $B$  的元素  $\beta^*$ , 有

$$\beta^*(z) = b_z^*, \quad \text{对所有的 } z \in Z$$

(由上述假定可知是存在的)。但

$$v_G(z^*) = M(\alpha^*, \beta^*), \quad (8.9)$$

因而对任意的  $\beta \in B$ ,

$$M(\alpha^*, \beta) = M_{z^*}(a_{z^*}^*, \beta(z^*)) \geq v_G(z^*) = M(\alpha^*, \beta^*). \quad (8.10)$$

此外,对任意的  $\alpha = (z, a) \in A$ ,

$$M(\alpha, \beta^*) = M_z(a, \beta^*(z)) = M_z(a, b_z^*)$$

$$\leq v_G(z) \leq \max_z v_G(z) = v = v_G(z^*) = M(\alpha^*, \beta^*). \quad (8.11)$$

所以由(8.10), (8.11)知, 对任意的  $\alpha \in A$  与  $\beta \in B$  有

$$M(\alpha, \beta^*) \leq M(\alpha^*, \beta^*) \leq M(\alpha^*, \beta). \quad (8.12)$$

也就是  $(\alpha^*, \beta^*)$  是博奕  $G$  的平衡点。同时博奕  $G$  的值  $v_G = M(\alpha^*, \beta^*)$ , 由(8.11)可知等于  $v$ , 所以在情况 1 时定理成立。在情况 2 时同样可得到証明。

情况 3 的証明: 此时設

$$v = \sum_z p(z) v_G(z). \quad (8.13)$$

再設对应于任意  $z \in Z$  的博奕  $G_z$  的平衡点为  $(a_z^*, b_z^*)$ ,  $a_z^* \in A_z$ ,  $b_z^* \in B_z$ . 則將  $z$  固定时, 对任意的  $a_z \in A_z$  和  $b_z \in B_z$ , 下面不等式成立:

$$M_z(a_z, b_z^*) \leq M_z(a_z^*, b_z^*) = v_G(z) \leq M_z(a_z^*, b_z). \quad (8.14)$$

并且,  $\alpha^* \in A$  和  $\beta^* \in B$  使

$$\alpha^*(z) = a_z^*, \beta^*(z) = b_z^*, \quad \text{对所有的 } z \in Z$$

(由上述假定可知是存在的)。因而对任意的  $\alpha \in A$ , 有

$$\begin{aligned} M(\alpha, \beta^*) &= \sum p(z) M_z(\alpha(z), \beta^*(z)) \\ &\leq \sum p(z) M_z(\alpha^*(z), \beta^*(z)) \\ &= \sum p(z) M_z(a_z^*, b_z^*) = \sum p(z) v_G(z) = v. \end{aligned} \quad (8.15)$$

另一方面,

$$\sum p(z) M_z(\alpha^*(z), \beta^*(z)) = M(\alpha^*, \beta^*). \quad (8.16)$$

所以由(8.15), (8.16),

$$M(\alpha, \beta^*) \leq M(\alpha^*, \beta^*) = v, \quad \text{对所有的 } \alpha \in A. \quad (8.17)$$

同样可証明下面不等式是成立的:

$$M(\alpha^*, \beta^*) \leq M(\alpha^*, \beta) \quad \text{对所有 } \beta \in B. \quad (8.18)$$

由(8.17), (8.18)可知  $(\alpha^*, \beta^*)$  是博奕  $G$  的平衡点, 博奕的值  $v_G$  等于(8.13)定义的值  $v$ . 証毕

## 第3章 2人零和博弈 II (混合策略的引入)

### §9 混合策略

对于有平衡点的博弈,我們討論了它的解,同时能够求出局中人的最优策略。但是对于沒有平衡点的博弈,如例 7.2 所述,到目前为止,还不可能作同样的处理。現在我們希望对这样的博弈,尽可能将策略的概念加以擴張,从而也能决定它的解。为此,我們再就沒有平衡点的博弈例 7.2, 重新进行考察。对局中人 1 來說,若局中人 2 取  $\beta_2$ , 則他取  $\alpha_2$  比取  $\alpha_1$  好, 若局中人 2 取  $\beta_1$ , 則他取  $\alpha_1$  比取  $\alpha_2$  好。可是局中人 1 并不知道局中人 2 所取的策略,因而他也沒法来判定  $\alpha_1$  和  $\alpha_2$  之間的优劣。現在局中人 1 投擲錢币,若出現正面,取  $\alpha_1$ , 出現反面取  $\alpha_2$ 。也就是分別以概率  $1/2$  来取  $\alpha_1$  与  $\alpha_2$ 。同时这个方法,不仅进行一次,而是多次反复地使用。从局中人 1 的角度来看,这样作似乎是避免对手摸清自己路子的有效办法,从而也可认为是他的策略,于是純策略的概念得到了擴張。这样的策略称为混合策略。

**定义 9.1** 当局中人  $k$  的純策略集合为  $A = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$  时,以概率  $x_i$  取的純策略  $\alpha_i$  (用一定的机遇装置选定  $\alpha_i$ ) 也是一个策略,这种策略称为**混合策略**(mixed strategy)。在此

$$x_i \geq 0, i=1, \dots, n; \sum_{i=1}^n x_i = 1. \quad (9.1)$$

混合策略用  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  或  $x = \sum_i x_i \alpha_i$  表示。

純策略  $\alpha_i$  可以看作是以概率 1 取  $\alpha_i$  的特殊混合策略。看作是混合策略的純策略  $\alpha_i$ , 仍用  $\alpha_i$  表示。当然也可表示为  $x = (0, \dots, 1, \dots, 0)$ 。其中第  $i$  个分量为 1, 其他分量皆为零。

这样,局中人  $k$  的混合策略  $x$  全体的集合和  $n$  维空间中以  $(1, 0, \dots, 0), (0, 1, 0, \dots, 0), \dots, (0, \dots, 0, 1)$  为顶点的  $(n-1)$  维单纯形  $S_n$  的点是一一对应的。因此,局中人  $k$  的混合策略全体的集合用  $S_n^{(k)}, S_n$  或  $S^{(k)}$  表示。今后所说的策略,除非特别声明,都约定为混合策略。

这样,在例 7.2 的博弈中,局中人 1, 2 可以分别取任意的策略  $x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2)$ 。局中人 1, 2 分别取策略  $x, y$  时,局的结果对局中人 1 的效用期望值,用  $M(x, y)$  表示。 $M(x, y)$  的值称为局中人 1, 2 取策略  $x, y$  时局中人 1 的赢得。在这个博弈中很明显,  $M(x, y)$  由下式给出:

$$M(x, y) = 5x_1y_1 + 2x_1y_2 + 3x_2y_1 + 6x_2y_2.$$

局中人 2 的赢得是  $-M(x, y)$ 。

局中人 1 取策略  $x$  时的安全水准是

$$\min_y M(x, y) = \begin{cases} 3 + 2x_1 & (0 \leq x_1 < 1/2 \text{ 时}); \\ 4 & (x_1 = 1/2 \text{ 时}); \\ 6 - 4x_1 & (1/2 < x_1 \leq 1 \text{ 时}), \end{cases}$$

从而局中人 1 的安全水准最大值是 4, 当局中人 1 取策略  $x^0 = (1/2, 1/2)$  时就可以得到保证。

局中人 2 取策略  $y$  时的安全水准是

$$\min_x [-M(x, y)] = -\max_x M(x, y) = \begin{cases} -(6 - 3y_1) & (0 \leq y_1 < 2/3 \text{ 时}); \\ -4 & (y_1 = 2/3 \text{ 时}); \\ -(2 + 3y_1) & (2/3 < y_1 \leq 1 \text{ 时}), \end{cases}$$

从而局中人 2 的安全水准最大值是  $-4$ , 当局中人 2 取策略  $y^0 = (2/3, 1/3)$  时就可以得到保证。

另外局中人 1, 2 分别取策略  $x^0, y^0$  时,局中人 1 的赢得如下:

$$M(x^0, y^0) = 5 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} + 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} + 6 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = 4.$$

这样在例 7.2 的博弈中,可知存在具有下面性质的局中人 1 的策略  $x^0 = (1/2, 1/2)$  和局中人 2 的策略  $y^0 = (2/3, 1/3)$  以及值 4:

(a) 策略  $x^0 = (1/2, 1/2)$  对局中人 1 可确保安全水准 4,  $x^0$  以外的策略只能保证比 4 小的安全水准。

(b) 策略  $y^0 = (2/3, 1/3)$  对局中人 2 可确保安全水准  $-4$ ,  $y^0$  以外的策

略只能保证比  $-4$  小的安全水准。

(c) 若局中人 2 的策略  $y^0$  不变, 则局中人 1 变更策略  $x^0$  时对自己不利。

(d) 若局中人 1 的策略  $x^0$  不变, 则局中人 2 变更策略  $y^0$  时对自己不利。

上面的性质 (a) ~ (d), 正是相当于博弈在纯策略的范围内平衡点所具有的性质 (参照第七节)。因此, 在用混合策略的例 7.2 博弈中, 策略组  $(x^0, y^0)$  应认为是博弈的平衡点, 或者认为是博弈的解, 值 4 可认为是博弈的值。这样在纯策略的范围内没有平衡点的博弈例 7.2, 由于引用了混合策略的概念, 也可认为存在有平衡点。那末在一般的矩阵博弈中, 对两个局中人许可使用混合策略时, 是否也总存在有平衡点呢? 这个问题将由所谓 2 人零和博弈的基本定理或者 minimax 定理得到肯定的回答。本章的目的就是要证明这个定理。首先引入下面的定义。

**定义 9.2** 矩阵博弈  $G = (A, B, M)$ ,  $A = \{\alpha_1, \dots, \alpha_m\}$ ,  $B = \{\beta_1, \dots, \beta_n\}$  中, 对各局中人许可取混合策略的博弈, 称为博弈  $G$  的混合扩充 (mixed extension), 用  $\Gamma = (A, B, M)^*$  表示。

博弈  $\Gamma$  中, 局中人 1, 2 分别取策略  $x \in S_m$ ,  $y \in S_n$  时, 局的结果对局中人 1 的期望效用  $M(x, y)$  由下式给出:

$$M(x, y) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n x_i M(\alpha_i, \beta_j) y_j = \sum_{i,j} a_{ij} x_i y_j, \quad (9.2)$$

在此  $a_{ij} = M(\alpha_i, \beta_j)$ .  $M(x, y)$  称为局中人 1, 2 取策略  $x, y$  时, 局中人 1 的赢得。

这里要注意的是, 从 (9.2) 可以看出, 函数  $M(x, y)$  总是关于  $x$  或  $y$  的线性函数。

再有下面关系式的意义是很显然的:

$$M(x, \beta_j) = \sum_i a_{ij} x_i, \quad M(\alpha_i, y) = \sum_j a_{ij} y_j. \quad (9.3)$$

和博弈  $G = (A, B, M)$  的平衡点一样, 对于混合扩充博弈  $\Gamma = (A, B, M)^*$ , 平衡点可定义如下:

**定义 9.3** 在博弈  $\Gamma = (A, B, M)^*$  中, 局中人 1, 2 的策略组  $(x^0, y^0)$  满足下面条件 (i) 与 (ii) 时, 策略组  $(x^0, y^0)$  称为博弈  $\Gamma$  的平衡点:

$$(i) \quad M(x^0, y^0) = \max_{x \in S_m} M(x, y^0).$$

$$(ii) \quad M(x^0, y^0) = \min_{y \in S_n} M(x^0, y).$$

在此  $S_i$  是有界闭集合, 所以定义的连续函数能在  $S_i$  上取最大值与最小值, 从而 (i), (ii) 的  $\max_x, \min_y$  都存在。

两个条件 (i), (ii) 和下面条件 (iii) 是等价的:

$$(iii) \quad M(x, y^0) \leq M(x^0, y^0) \leq M(x^0, y),$$

对所有的  $x \in S_m, y \in S_n$ .

问题的焦点是博弈  $\Gamma = (A, B, M)^*$  是否存在平衡点。这个问题将在下节得到解决, 下面是问题的准备知识。

**辅助定理 9.1** 下列不等式成立:

$$\max_x \min_y M(x, y) \leq \min_y \max_x M(x, y). \quad (9.4)$$

**证明** 很明显, 对于任意的  $x \in S_m, y \in S_n$  有

$$M(x, y) \leq \max_x M(x, y).$$

所以

$$\min_y M(x, y) \leq \min_y \max_x M(x, y). \quad (9.5)$$

(9.5) 对于任意的  $x \in S_m$  都成立, 所以 (9.4) 成立。 证毕

**定理 9.1** 对于博弈  $\Gamma = (A, B, M)^*$ , 下面的条件 (1), (2) (3) 相互等价。

条件(1): 博弈  $\Gamma$  存在平衡点  $(x^*, y^*)$ .

条件(2): 在博弈  $\Gamma$  中, 下面的等式成立:

$$v_1 \equiv \max_x \min_y M(x, y) = \min_y \max_x M(x, y) \equiv v_2. \quad (9.6)$$

条件(3): 存在有使下面关系式成立的实数  $v$  和局中人 1, 2 的策略  $x^0, y^0$ :

$$M(\alpha_i, y^0) \leq v \quad (i=1, \dots, m), \quad (9.7)$$

且

$$M(x^0, \beta_j) \geq v \quad (j=1, \dots, n). \quad (9.8)$$

**証明** (1)→(2): 从  $v_1, v_2$  的定义和由条件(1)假定存在的平衡点  $(x^*, y^*)$  的定义可知, 下面不等式成立:

$$\begin{aligned} v_2 &\equiv \min_y \max_x M(x, y) \leq \max_x M(x, y^*) = M(x^*, y^*) \\ &= \min_y M(x^*, y) \leq \max_x \min_y M(x, y) \equiv v_1. \end{aligned} \quad (9.9)$$

即

$$v_2 \leq v_1. \quad (9.10)$$

另一方面, 由輔助定理 9.1, 有

$$v_1 \leq v_2. \quad (9.11)$$

所以由 (9.10), (9.11) 知  $v_1 = v_2$ , 即条件 (2) 成立。

(2)→(3): 設  $v = v_1 = v_2$ , 則取滿足

$$v_1 = \max_x \min_y M(x, y) = \min_y M(x^0, y), \quad (9.12)$$

$$v_2 = \min_y \max_x M(x, y) = \max_x M(x, y^0) \quad (9.13)$$

的策略  $x^0 \in S_m, y^0 \in S_n$  (它是确实存在的) 时, 对所有的  $j=1, \dots, n$  及所有的  $i=1, \dots, m$ , 下面关系式成立:

$$\begin{aligned} M(x^0, \beta_j) &\geq \min_y M(x^0, y) = \max_x \min_y M(x, y) = v \\ &= \min_y \max_x M(x, y) = \max_x M(x, y^0) \geq M(\alpha_i, y^0). \end{aligned} \quad (9.14)$$

即条件(3)成立。

(3)→(1): 当局中人 1 的任意策略为  $x = (x_1, \dots, x_m) \in S_m$  时, 对(9.7)的两边分别乘以  $x_i$ , 且对  $i$  由 1 到  $m$  相加, 則得

$$M(x, y^0) \leq v. \quad (9.15)$$

同样由 (9.8), 对于局中人 2 的任意策略  $y = (y_1, \dots, y_n) \in S_n$ , 有

$$M(x^0, y) \geq v, \quad (9.16)$$

所以由 (9.15), (9.16), 对任意的  $x \in S_m, y \in S_n$ , 得

$$M(x, y^0) \leq v \leq M(x^0, y). \quad (9.17)$$

在(9.17)中, 取  $x = x^0, y = y^0$ , 可知



$$v = M(x^0, y^0), \quad (9.18)$$

所以从 (9.17), (9.18) 可知  $(x^0, y^0)$  是平衡点。 証毕

**定义 9.4** 使(9.12)成立的策略  $x^0$  称为局中人 1 的 **maximin 策略**, 使(9.13)成立的策略  $y^0$ , 称为局中人 2 的 **minimax 策略**。

由定理 9.1 的证明过程, 直接可知下面的系成立。

**系 9.1** 若博弈  $\Gamma = (A, B, M)^*$  有平衡点, 则下列命题成立:

(a) 若  $(x^*, y^*)$  为任意的平衡点, 则

$$v = M(x^*, y^*), \quad (9.19)$$

此处  $v$  是 (9.6) 两边的共同值。所以  $x^*$ ,  $y^*$  分别是局中人 1 的 maximin 策略, 局中人 2 的 minimax 策略。

(b) 若局中人 1 的任意的 maximin 策略为  $x^0$ , 局中人 2 的任意的 minimax 策略为  $y^0$ , 则  $(x^0, y^0)$  是博弈  $\Gamma$  的平衡点。

## § 10 矩陣博弈的基本定理

首先提出几个辅助定理。

**辅助定理 10.1** 对于局中人 1, 2 的任意策略  $x \in S_m, y \in S_n$ , 下面等式成立:

$$\min_y M(x, y) = \min_j M(x, \beta_j), \quad (10.1)$$

$$\max_x M(x, y) = \max_i M(\alpha_i, y). \quad (10.2)$$

**证明** 特别取  $y^{(j)} = (0, \dots, 1, \dots, 0)$  (第  $j$  个元素为 1, 其他元素为 0) 为局中人 2 的策略时,

$$\min_y M(x, y) \leq M(x, y^{(j)}) = M(x, \beta_j) \quad (j=1, \dots, n),$$

所以

$$\min_y M(x, y) \leq \min_j M(x, \beta_j). \quad (10.3)$$

此外, 对所有的  $j$ , 有

$$M(x, \beta_j) \geq \min_j M(x, \beta_j) \quad (j=1, 2, \dots, n). \quad (10.4)$$

現在若局中人 2 取任意策略  $y = (y_1, \dots, y_n) \in S_n$ , 对 (10.4) 的两边分別乘以  $y_j$ , 再对  $j$  由 1 到  $n$  相加, 則得

$$M(x, y) \geq \min_j M(x, \beta_j),$$

所以

$$\min_y M(x, y) \geq \min_j M(x, \beta_j). \quad (10.5)$$

从而由 (10.3), (10.5) 可知 (10.1) 成立。同样可証明 (10.2) 成立。 証毕

**輔助定理 10.2** 設  $G = (A, B, M)^*$  是矩陣博奕  $G = (A, B, M)$  的混合扩充博奕, 只存在唯一的一个实数  $v = v^*$ , 和至少一个局中人 1 的混合策略  $x = x^* \in S_m$ , 以及局中人 2 的混合策略  $y = y^* \in S_n$  的組  $(x^*, y^*)$ , 使下面不等式 (10.6) 和 (10.7) 成立:

$$v \geq M(\alpha_i, y) \quad (i=1, \dots, m), \quad (10.6)$$

$$v \leq M(x, \beta_j) \quad (j=1, \dots, n). \quad (10.7)$$

**証明** 代替不等式 (10.7), 看下面的不等式:

$$w \leq M(x, \beta_j) \quad (j=1, \dots, n). \quad (10.8)$$

很明显, 使不等式 (10.6) 和 (10.8) 成立的实数  $v, w$  和  $x = (x_1, \dots, x_m) \in S_m, y = (y_1, \dots, y_n) \in S_n$  是存在的。現对 (10.6) [(10.8)] 的两边分別乘以  $x_i$  [ $y_j$ ], 并对所有的  $i$  [ $j$ ] 相加, 則有

$$w \leq M(x, y) \leq v, \quad (10.9)$$

因而

$$w \leq v. \quad (10.10)$$

所以使 (10.6) 成立的  $v$  有下界, 由于  $S_n$  是有界閉集合, 因此  $v$  有下限  $v^*$ , 它对某个  $y^* \in S_n$  能使 (10.6) 成立。同理  $w$  有上限  $w^*$ , 它对某个  $x^* \in S_m$  能使 (10.8) 成立。而且由 (10.10),

$$w^* \leq v^*. \quad (10.11)$$

所以若我們能証明

$$w^* = v^*, \quad (10.12)$$

則輔助定理將得到證明。現在對於一般的  $m+n$ , 用數學歸納法證明(10.12)。

若  $m+n=2$ , 顯然(10.12)成立。現在假定對於局中人 1, 2 的純策略總數分別為正整數  $m'$  及  $n'$  的博弈, (10.12) 是成立的, 此處  $m'+n' < m+n$ 。

於是, 若  $v=v^*$ ,  $w=w^*$ , 如果取  $x^*$ ,  $y^*$ , 能對所有的  $i$  和所有的  $j$ , 分別使(10.6)及(10.8)的等號成立, 則用推導(10.9)的同樣手續就可得到

$$w^* = M(x^*, y^*) = v^*,$$

所以(10.12)是成立的。此外, 如果這時(10.6) [(10.8)] 對於所有的  $i$  [ $j$ ] 成立嚴格的不等號, 則與  $v^*$  [ $w^*$ ] 的下限 [上限] 性質矛盾。因此, 當  $v=v^*$  [ $w=w^*$ ] 時, 必有  $y^*$  [ $x^*$ ], 使(10.6) [(10.8)] 對某些  $i$  [ $j$ ] 成立不等號, 同時對另一些  $i$  [ $j$ ], 成立等號。因而, 不失一般性, 對於  $v^*$  和  $y^*$ , 可假定不等式(10.6)成立的形式為

$$v^* = M(\alpha_i, y^*) \quad (i=1, \dots, m_1), \quad (10.13)$$

$$v^* > M(\alpha_i, y^*) \quad (i=m_1+1, \dots, m). \quad (10.14)$$

這時局中人 1 的純策略縮小為  $\alpha_1, \dots, \alpha_{m_1}$ , 局中人 2 的純策略仍然是  $\beta_1, \dots, \beta_n$ 。考察縮小的博弈  $G^*$ 。設這個博弈的混合擴充博弈為  $\Gamma^*$ , 並設使不等式(10.6)和(10.8)成立的  $v$  的下限和  $w$  的上限分別為  $v_1$  和  $w_1$ 。

由於使(10.6)對  $i=1, \dots, m$  成立的  $v$  的值和  $y$  當然也能使(10.6)對  $i=1, \dots, m_1$  成立, 所以

$$v_1 \leq v^*. \quad (10.15)$$

此外, 對於縮小的博弈  $\Gamma^*$ , 取使(10.8)成立的  $w$  與  $x' = (x_1, \dots, x_{m_1})$ , 而後將  $x'$  擴大, 作  $x = (x_1, \dots, x_{m_1}, 0, \dots, 0) \in S_m$ 。這樣的  $w$  和  $x$ , 在原来的博弈  $\Gamma$  上, 能使(10.8)成立。所以

$$w_1 \leq w^*. \quad (10.16)$$

現在來證明

$$v_1 = v^*. \quad (10.17)$$

為此, 設 (10.17) 不成立, 由 (10.15) 有

$$v_1 < v^*. \quad (10.18)$$

因此,  $v_1$  就是在縮小的博奕  $I^*$  上, 對於  $y' = (y'_1, \dots, y'_n) \in S_n$ , 使對應於 (10.6) 的不等式成立的  $v$ , 也就是

$$v_1 \geq M(\alpha_i, y'), \quad (i=1, \dots, m_1). \quad (10.19)$$

此時, 取實數  $\nu$ ,  $0 < \nu < 1$ , 作向量  $y = \nu y^* + (1-\nu)y' \in S_n$ , 由函數  $M$  的綫性性質, 得到

$$M(\alpha_i, y) = \nu M(\alpha_i, y^*) + (1-\nu)M(\alpha_i, y'). \quad (10.20)$$

但對於  $i=1, \dots, m_1$ , 由 (10.13), (10.19) 和假定 (10.18) 得知

$$v^* > \nu M(\alpha_i, y^*) + (1-\nu)M(\alpha_i, y'). \quad (10.21)$$

所以由 (10.20), (10.21) 有

$$v^* > M(\alpha_i, y) \quad (i=1, \dots, m_1). \quad (10.22)$$

由於對  $i=m_1+1, \dots, m$ , (10.14) 成立, 所以若  $\nu$  充分接近於 1 時, (10.21) 即 (10.22), 對於  $i=m_1+1, \dots, m$  也成立。從而  $v^*$  不是使 (10.6) 成立的  $v$  的下限, 得到矛盾。所以 (10.18) 不成立, 因而 (10.17) 成立。

此外, 由歸納法的假定,

$$w_1 = v_1. \quad (10.23)$$

所以由 (10.17), (10.23) 和 (10.16) 得

$$v^* \leq w^*. \quad (10.24)$$

從而, 由 (10.11), (10.24) 可知 (10.12) 成立。所以本輔助定理得證。 証畢

**定理 10.1** (基本定理或 minimax 定理) 任意矩陣博奕  $G = (A, B, M)$  的混合擴充博奕  $I = (A, B, M)^*$ , 恒存在平衡點。

**証明** 輔助定理 10.2, 实质上是說在混合扩充博弈  $\Gamma$  中, 定理 9.1 的条件(3)是成立的。从而定理 9.1 的三个命题(1), (2), (3)并不是假定的条件, 而是在博弈  $\Gamma$  中实际成立的命题。証毕

**注意 10.1** 由于定理 10.1 的成立, 故系 9.1 的命题(a), (b)在博弈  $\Gamma$  上成立。

**定义 10.1** 設矩陣博弈  $G = (A, B, M)$  的混合扩充博弈  $\Gamma$  中, 已知存在的平衡点为  $(x^0, y^0)$ , 則

- (a) 局中人 1, 2 的策略組  $(x^0, y^0)$  称为**博弈  $\Gamma$  的解**。
- (b)  $x^0$  称为局中人 1 的**最优策略**,  $y^0$  称为局中人 2 的**最优策略**。
- (c)  $M(x^0, y^0)$  称为**博弈  $\Gamma$  的值**, 用  $v_\Gamma$  表示。

因此, 定理 10.1 可改述如下:

**定理 10.1'** 任意矩陣博弈的混合扩充矩陣恒存在着解。

此外, 根据注意 10.1, 应注意下面事項。

**注意 10.2** 在博弈  $\Gamma$  中, 下面三个策略是等价的: (1) 局中人 1 的 maximin 策略, (2) 局中人 1 的最优策略, (3) 使  $v_\Gamma = \min_y M(x^0, y)$  的策略  $x^0$ ; (1') 局中人 2 的 minimax 策略, (2') 局中人 2 的最优策略, (3') 使  $v_\Gamma = \max_x M(x, y^0)$  的策略  $y^0$ 。

再者, 在 § 7 中所說的关于矩陣博弈平衡点的性质 (iii), 很明显对于混合扩充博弈也同样成立, 且可以用同样的方法得到証明。也就是說下面定理成立。

**定理 10.2** 設  $(x^0, y^0)$  与  $(x^*, y^*)$  为博弈  $\Gamma$  的任意两个平衡点, 下面关系成立:

- (a)  $(x^0, y^*)$ ,  $(x^*, y^0)$  也是平衡点(可換性),
- (b)  $M(x^0, y^0) = M(x^0, y^*) = M(x^*, y^0) = M(x^*, y^*)$ 。

最后叙述最优策略的一个性质。

**定理 10.3** 設在博弈  $\Gamma$  中, 局中人 1, 2 的任意最优策略分別

为  $x^* = (x_1^*, \dots, x_m^*)$ ,  $y^* = (y_1^*, \dots, y_n^*)$ , 博奕的值为  $v_I$ , 則对于

$$M(\alpha_i, y^*) < v_I \quad (10.25)$$

的  $\alpha_i$ , 有  $x_i^* = 0$ , 对于

$$M(x^*, \beta_j) < v_I \quad (10.26)$$

的  $\beta_j$ , 有  $y_j^* = 0$ .

**証明** 对于使 (10.25) 成立的  $\alpha_i$ , 設  $x_i^* > 0$ . 則

$$M(\alpha_i, y^*) x_i^* < v_I x_i^*, \quad (10.27)$$

此外很明显

$$M(\alpha_h, y^*) x_h^* \leq v_I x_h^* \quad (h = 1, \dots, i-1, i+1, \dots, m), \quad (10.28)$$

所以由 (10.27), (10.28),

$$\sum_{h=1}^m M(\alpha_h, y^*) x_h^* = M(x^*, y^*) < v_I \sum_{h=1}^m x_h^* = v_I.$$

这和  $(x^*, y^*)$  是博奕  $I$  的平衡点相矛盾, 同样, 当  $x_i^* < 0$  时也能得出矛盾。所以  $x_i^* = 0$ . 証毕

## § 11 矩陣博奕的基本解

設矩陣博奕  $G = (A, B, M)$  的混合扩充博奕为  $I$ . 本节研究在  $I$  中, 局中人 1, 2 的策略全体的集合  $S_m, S_n$  內他們的最优策略集合的結構問題。

局中人 1, 2 的一般混合策略分別用  $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_m) \in S_m$ ,  $\eta = (\eta_1, \dots, \eta_n) \in S_n$  表示, 局中人 1 的最优策略記作  $x = (x_1, \dots, x_m)$ , 它的全体的集合記作  $X (\subset S_m)$ , 局中人 2 的最优策略記作  $y = (y_1, \dots, y_n)$ , 它的全体的集合記作  $Y (\subset S_n)$ . 由 § 10 可知, 取任意的  $x \in X$  和任意的  $y \in Y$  时, 它們的策略組  $(x, y)$  是  $I$  的解, 且博奕  $I$  的解完全是这样的組。我們的目的是要了解  $X, Y$  的构造形式。首先有下面的定理。

**定理 11.1** 局中人 1, 2 的最优策略集合  $X$  和  $Y$ , 都是非空, 有界, 凸的闭集合。

**証明** 由定理 10.1 可知  $X, Y$  不是空集合。本定理只就集合  $X$  来証明。由于  $S_m$  是有界的, 故显然  $X$  是有界的。

(a)  $X$  是凸的: 設  $X$  的元素的任意凸綫性組合为  $\xi_0$ , 也就是对于任意的  $x^{(h)} \in X, h=1, \dots, r$  和任意的实数  $a_h \geq 0, h=1, \dots, r, \sum_h a_h = 1$ , 設

$$\xi_0 = \sum_h a_h x^{(h)}. \quad (11.1)$$

因为  $S_m$  是凸的, 所以  $\xi_0 \in S_m$ .

設博奕  $V$  的值为  $v_V$ , 則

$$\min_{\eta} M(\xi_0, \eta) \leq \max_{\xi} \min_{\eta} M(\xi, \eta) = v_V. \quad (11.2)$$

此外, 根据  $M(\xi, \eta)$  的綫性性质,

$$\begin{aligned} \min_{\eta} M(\xi_0, \eta) &= \min_{\eta} \sum_h a_h M(x^{(h)}, \eta) \\ &\geq \sum_h a_h \min_{\eta} M(x^{(h)}, \eta) = \sum_h a_h v_V = v_V, \end{aligned} \quad (11.3)$$

所以由 (11.2), (11.3) 可知

$$\min_{\eta} M(\xi_0, \eta) = v_V. \quad (11.4)$$

即  $\xi_0$  是局中人 1 的最优策略, 且  $\xi_0 \in X$ , 所以  $X$  是凸的。

(b)  $X$  是闭集合: 設  $\xi_0 = \lim_{h \rightarrow \infty} x^{(h)}$ , 在此  $x^{(h)} \in X, h=1, 2, \dots$ . 由于  $S_m$  是闭集合, 所以  $\xi_0 \in S_m$ . 对于  $\xi_0$ , 显然 (11.2) 是成立的。又由  $M(\xi, \eta)$  的綫性性质, 得

$$\min_{\eta} M(\xi_0, \eta) = \min_{\eta} \lim_{h \rightarrow \infty} M(x^{(h)}, \eta). \quad (11.5)$$

但  $x^{(h)} \in X$ , 所以对于所有的  $\eta \in S_n$ ,

$$M(x^{(h)}, \eta) \geq v_V \quad (h=1, 2, \dots),$$

因此, 对于所有的  $\eta \in S_n$ ,

$$\lim_{h \rightarrow \infty} M(x^{(h)}, \eta) \geq v_V. \quad (11.6)$$

从而由 (11.5), (11.6) 可知

$$\min_{\eta} M(\xi_0, \eta) \geq v_I. \quad (11.7)$$

所以由 (11.2), (11.7) 知

$$\min_{\eta} M(\xi_0, \eta) = v_I$$

成立,  $\xi_0 \in X$ , 所以  $X$  是閉集合。

証毕

設  $Z$  是  $r$  維向量空間的集合,  $z^*$  为  $Z$  中的点。若任取  $Z$  中两个相异的点  $z^{(1)}, z^{(2)}$ , 都不能使

$$z^* = \frac{1}{2} (z^{(1)} + z^{(2)})$$

成立, 則称这样的  $z^*$  为  $Z$  的端点 (extreme point)。  $Z$  的端点全体的集合称为  $Z$  的端点集合, 用  $Z^*$  表示。

**輔助定理 11.1** 設  $Z$  是  $r$  維向量空間的非空, 有界, 凸的閉集合。則  $Z$  的端点集合  $Z^*$  是非空的, 且  $Z$  是含有  $Z^*$  的最小的凸集合。

証明可参考 Blackwell and Girshick [1]。

在博弈  $I$  中, 若局中人 1, 2 的最优策略全体的集合分别为  $X, Y$ , 由定理 11.1 和輔助定理 11.1, 可知  $X, Y$  的端点集合  $X^*, Y^*$  都不是空集合。因此, 引入下面定义。

**定义 11.1**  $X^*$  的元素  $x^*$  和  $Y^*$  的元素  $y^*$ , 分別称为局中人 1, 2 的**基本最优策略**, 它們的組  $(x^*, y^*)$ , 称为博弈  $I$  的**基本解** (basic solution)。

由輔助定理 11.1, 可得下面定理。

**定理 11.2** 博弈  $I$  的解全体的集合, 可由局中人 1, 2 的基本最优策略集合  $X^*$  和  $Y^*$  完全确定。也就是局中人 1, 2 的策略組  $(x, y)$ , 只有当  $x, y$  分別是  $X^*, Y^*$  的元素的凸綫性組合时, 才是博弈的解。



因此,我們为了知道博弈  $\Gamma$  的解的全体集合,只要知道  $X^*$  和  $Y^*$  的构造即可。

博弈  $G = (A, B, M)$  的赢得矩阵也用  $M$  表示,即

$$M = (M(\alpha_i, \beta_j)) = (a_{ij}).$$

矩阵  $M$  的第  $i$  行用  $A_i$ , 第  $j$  列用  $B_j$  表示,也就是

$$A_i = (a_{i1}, \dots, a_{in}), \quad B_j = (a_{1j}, \dots, a_{mj})^T \textcircled{1},$$

$$i=1, \dots, m; \quad j=1, \dots, n.$$

此外还使用下面记号:

$$J_r = (1, 1, \dots, 1), \quad O_r = (0, 0, \dots, 0),$$

此处,  $J_r, O_r$  的分量数目是  $r$  个。

今后要根据需要,使用从赢得矩阵  $M = (a_{ij})$  中去掉某行[列]所得的子矩阵。从策略  $x = (x_1, \dots, x_m)$  [ $y = (y_1, \dots, y_n)$ ] 中去掉与矩阵中去掉的行[列]相对应的元素所得的向量用  $\dot{x}$  [ $\dot{y}$ ] 表示。

**定理 11.3** 设博弈  $\Gamma = (A, B, M)^*$  的值  $v_\Gamma$  异于 0, 则局中人 1, 2 的最优策略  $x, y$  是基本最优策略的充要条件为存在赢得矩阵  $M$  的满秩子矩阵(non-singular submatrix)  $\dot{M}$  ( $r \times r$  矩阵), 使得:

$$\dot{x} = \frac{J_r \dot{M}^{-1}}{J_r \dot{M}^{-1} J_r^T}, \quad (11.8)$$

$$\dot{y} = \frac{J_r (\dot{M}^{-1})^T}{J_r \dot{M}^{-1} J_r^T}, \quad (11.9)$$

$$v_\Gamma = \frac{1}{J_r \dot{M}^{-1} J_r^T}. \quad (11.10)$$

**证明** 预备: 设在赢得矩阵  $M$  中, 去掉了和局中人 1, 2 的最优策略  $x = (x_1, \dots, x_m)$ ,  $y = (y_1, \dots, y_n)$  的零分量对应的行和列后, 所得的子矩阵为  $\dot{M}$ . 为了不失一般性, 可假定

① 一般, 以  $A^T$  表矩阵  $A$  的转置矩阵。

$$\begin{aligned}
x_i &\neq 0, & y_j &\neq 0 & (i=1, \dots, m'; & j=1, \dots, n'), \\
x_i &= 0, & y_j &= 0 & (i=m'+1, \dots, m; \\
& & & & j=n'+1, \dots, n), \\
1 &\leq m' \leq m, & 1 &\leq n' \leq n.
\end{aligned} \quad (11.11)$$

則  $M_1$  是  $m' \times n'$  矩陣。現在設存在有使 (11.8) ~ (11.10) 成立的  $r \times r$  滿秩子矩陣  $\dot{M}$ , 則

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^r x_i &= \dot{x} J_r^T = \frac{J_r \dot{M}^{-1} J_r^T}{J_r \dot{M}^{-1} J_r^T} = 1, \\
\sum_{j=1}^r y_j &= \dot{y} J_r^T = \frac{J_r (\dot{M}^{-1})^T J_r^T}{J_r \dot{M}^{-1} J_r^T} = 1,
\end{aligned}$$

而  $r \geq m'$ ,  $r \geq n'$ , 所以  $M_1$  是  $\dot{M}$  的子矩陣 (用記号  $\dot{M} \supset M_1$  表示)。

其次, 在矩陣  $M y^T$  和  $x M$  中有其值异于  $v_r$  的分量, 設在  $M$  中去掉与这些分量相当的行与列, 記所得的子矩陣为  $M_2$ ,  $M_2$  是  $m'' \times n''$  矩陣。則由 (11.8) ~ (11.10) 得

$$\dot{M} \dot{y}^T = v_r J_r^T, \quad \dot{x} \dot{M} = v_r J_r, \quad (11.12)$$

所以  $m'' \geq r$ ,  $n'' \geq r$ . 即  $\dot{M}$  是  $M_2$  的子矩陣。注意, 由于矩陣  $\dot{M}$  满足 (11.8) ~ (11.10), 所以

$$M_1 \subset \dot{M} \subset M_2. \quad (11.13)$$

充分性: 設对于局中人 1, 2 的最优策略  $x, y$ , 条件 (11.8) ~ (11.10) 成立, 但  $x \notin X^*$ ,  $y \notin Y^*$ . 我們將証明, 假設  $x \notin X^*$  将导出矛盾的結論。(对于假設  $y \notin Y^*$ , 同样可得出矛盾結論。) 由于  $x \notin X^*$ , 所以存在有两个不同的最优策略  $x^{(1)}, x^{(2)} \in X$ , 使得  $x = \frac{1}{2}(x^{(1)} + x^{(2)})$ . 因而

$$\dot{x} = \frac{1}{2}(\dot{x}^{(1)} + \dot{x}^{(2)}), \quad (11.14)$$

很明显, 为了作  $\dot{x}^{(1)}, \dot{x}^{(2)}$ , 所去掉的  $x^{(1)}, x^{(2)}$  的分量全部是 0. 設  $\dot{B}_j$  是  $\dot{M}$  的第  $j$  列的列向量, 則

$$\dot{x}^{(1)}\dot{B}_j = x^{(1)}B_j \geq v_r, \text{ 且 } \dot{x}^{(2)}\dot{B}_j = x^{(2)}B_j \geq v_r. \quad (11.15)$$

此外由 (11.12), (11.14) 得

$$\frac{1}{2}(\dot{x}^{(1)} + \dot{x}^{(2)})\dot{B}_j = v_r. \quad (11.16)$$

所以从 (11.15), (11.16) 得

$$\dot{x}^{(1)}\dot{M} = v_r J_r = \dot{x}^{(2)}\dot{M},$$

即下式成立:

$$(\dot{x}^{(1)} - \dot{x}^{(2)})\dot{M} = O_r. \quad (11.17)$$

但  $\dot{x}^{(1)} \neq \dot{x}^{(2)}$ , 因此 (11.17) 与矩陣  $\dot{M}$  是滿秩的假設矛盾。

必要性: 設  $x \in X^*$ ,  $y \in Y^*$ . 我們要构造  $M$  的一个滿足 (11.8)  $\sim$  (11.10) 的子矩陣  $\dot{M}$ . 为此, 从矩陣  $M_1$  出发, 象下面那样, 順次地添加行和列。

首先, 对于  $M_1$  添上属于  $M_2$  而不属于  $M_1$  的行, 这行应与  $M_1$  的行同长。添加的时候按下面的規則进行: 如果所考察的行与  $M_1$  的行綫性无关, 則将此行添上, 否則就将此行舍弃, 再取第二行, 如此順次进行, 所取的行与  $M_1$  及已添入的行都綫性无关时即作为新行添入, 否則舍弃。为了不失一般性, 設添加行的番号为  $m' + 1, \dots, s (\leq m'')$ 。

此外, 对于  $M_1$  的列, 也和上面同样进行添加属于  $M_2$  而不属于  $M_1$  的列, 这些列应与  $M_1$  的列同长。为了不失一般性, 設添入的列的番号为  $n' + 1, \dots, t (\leq n'')$ 。

設用  $M$  的第  $1, 2, \dots, s$  行和第  $1, 2, \dots, t$  列所构成的  $s \times t$  矩陣为  $\dot{M}_0$ . 此矩陣称为基本解  $(x, y)$  的核 (kernel)。核是依賴于添加在  $M_1$  上的行和列的次序而确定的, 但它并不是唯一的。現在將矩陣  $\dot{M}_0$  的第  $i$  行, 第  $j$  列分別記为

$$H_i = (a_{i1}, \dots, a_{it}), \quad (i = 1, \dots, s),$$

$$D_j = (a_{1j}, \dots, a_{sj})^T, \quad (j = 1, \dots, t).$$

設矩陣  $\dot{M}_0$  是降秩的, 假設  $\dot{M}_0$  的行綫性相關 (由於  $\dot{M}_0$  的構成方法對於行和列完全一樣, 所以若列是綫性相關, 下面的討論同樣有效), 則存在不完全是 0 的實數  $c_1, \dots, c_s$ , 使下式成立:

$$\sum_{i=1}^s c_i H_i = O_t. \quad (11.18)$$

現在設  $c_{m'+1}, \dots, c_s$  中  $c_h$  不為零。則由 (11.18) 知  $H_h$  和其餘的  $H_1, \dots, H_{h-1}, H_{h+1}, \dots, H_s$  綫性相關。這和  $\dot{M}_0$  的構作方法矛盾 (當然, 構成  $\dot{M}_0$  時, 我們決定添加與否的向量是向量  $H_i$  的部分向量, 但是這些向量如果綫性無關, 則擴充的向量組  $H_i$  當然也綫性無關)。從而 (11.18) 中,

$$c_h = 0 \quad (h = m' + 1, \dots, s). \quad (11.19)$$

設對於使 (11.18) 成立的  $c_i (i = 1, \dots, s)$ , 添加上

$$c_{s+1} = \dots = c_m = 0 \quad (11.20)$$

所得的  $m$  維向量為  $c$ , 即

$$c = (c_1, \dots, c_m) = (c_1, \dots, c_{m'}, 0, \dots, 0). \quad (11.21)$$

那末,  $H_i = (a_{i1}, \dots, a_{it})$  是含於  $M_2$  中的  $\dot{M}_0$  的行, 所以由  $M_2$  的定義,

$$H_i \dot{y}^T = A y^T = v_F \quad (i = 1, \dots, s). \quad (11.22)$$

因而由 (11.18), (11.22) 得

$$\sum_{i=1}^s c_i v_F = \sum_{i=1}^s c_i H_i \dot{y}^T = \left( \sum_{i=1}^s c_i H_i \right) \dot{y}^T = O_t \dot{y}^T = 0. \quad (11.23)$$

可是由假定  $v_F \neq 0$ , 因此由 (11.23), 可知

$$\sum_{i=1}^s c_i = 0. \quad (11.24)$$

所以由 (11.24) 和向量  $c$  的構造 (11.21), 得

$$\sum_{i=1}^m c_i = 0. \quad (11.25)$$

其次, 取充分小的正數  $\varepsilon$ , 構造向量  $x \pm \varepsilon c$ , 使得它的分量, 適

合条件

$$x_i \pm \varepsilon c_i = 0 \quad (i = 1, \dots, m'). \quad (11.26)$$

又由 (11.11), (11.19) 和 (11.20) 可知, 不论正数  $\varepsilon$  的值如何, 总有

$$x_i \pm \varepsilon c_i = 0 \quad (i = m' + 1, \dots, m). \quad (11.27)$$

又由 (11.25),

$$\sum_{i=1}^m (x_i \pm \varepsilon c_i) = \sum_{i=1}^m x_i = 1, \quad (11.28)$$

所以由 (11.26) ~ (11.28) 得到

$$x \pm \varepsilon c \in S_m. \quad (11.29)$$

另一方面, 对于  $\dot{M}_0$  的第  $j$  列  $D_j = (a_{1j}, \dots, a_{sj})^T$ , 从 (11.18) 得到

$$(c_1, \dots, c_t) D_j = 0 \quad (j = 1, \dots, t). \quad (11.30)$$

从而根据向量  $c$  的定义 (11.21) 和 (11.30), 对于矩阵  $M$  的第  $j$  列  $B_j$ , 下面的关系成立:

$$c B_j = 0 \quad (j = 1, \dots, t). \quad (11.31)$$

那末根据矩阵  $\dot{M}_0$  的构成方法, 对于  $t < k \leq n''$  的任意的  $k$ , 向量  $\dot{D}_k = (a_{1k}, \dots, a_{n''k})^T$  和向量  $\dot{D}_1, \dots, \dot{D}_t$  线性相关。因而存在实数  $d_1, \dots, d_t$ , 使得

$$\dot{D}_k = d_1 \dot{D}_1 + \dots + d_t \dot{D}_t. \quad (11.32)$$

所以由 (11.21), (11.32) 和 (11.31), 下面等式成立:

$$\begin{aligned} c B_k &= \dot{c} \dot{D}_k = \dot{c} \left( \sum_{j=1}^t d_j \dot{D}_j \right) \\ &= \dot{c} \left( \sum_{j=1}^t d_j B_j \right) = \sum_{j=1}^t d_j (\dot{c} B_j) = 0, \\ &\quad t < k \leq n''. \end{aligned} \quad (11.33)$$

用 (11.31), (11.33) 得

$$(x \pm \varepsilon c) B_j = x B_j = v_r \quad (j = 1, \dots, n''). \quad (11.34)$$

另一方面, 当  $j > n''$  时, 由  $n''$  的定义,

$$xB_j > v_r \quad (n'' < j \leq n), \quad (11.35)$$

所以根据 (11.34), (11.35), 当正数  $\varepsilon$  充分小时, 下式成立:

$$\min_{j=1, \dots, n} (x \pm \varepsilon e) B_j = v_r, \quad (11.36)$$

由 (11.29), (11.36) 可知  $x \pm \varepsilon e$  是局中人 1 的最优策略。即  $x \pm \varepsilon e \in X$ 。这与  $x \in X^*$  相矛盾。

因而矩阵  $\dot{M}_0$  的各行是线性无关的, 同样  $\dot{M}_0$  的各列也是线性无关的, 从而  $\dot{M}_0$  是满秩矩阵, 且  $s=t(=r)$ , 故矩阵

$$\dot{M}_0 = (a_{ij}) \quad (i, j=1, \dots, r) \quad (11.37)$$

是满秩的。可以证明这个矩阵  $\dot{M}_0$  满足条件 (11.8) ~ (11.10)。由  $\dot{M}_0$  的构成方法, 很明显, 设  $\dot{x} = (x_1, \dots, x_r)$ ,  $\dot{y} = (y_1, \dots, y_r)$  时, 则

$$\dot{x} \dot{M}_0 = v_r J_r, \quad \dot{M}_0 \dot{y}^T = v_r J_r^T. \quad (11.38)$$

但矩阵  $\dot{M}_0$  是满秩的, 所以由 (11.38),

$$\dot{x} = v_r J_r \dot{M}_0^{-1}, \quad \dot{y}^T = v_r \dot{M}_0^{-1} J_r^T. \quad (11.39)$$

又

$$1 = \dot{x} J_r^T = v_r J_r \dot{M}_0^{-1} J_r^T. \quad (11.40)$$

因此, 由 (11.39), (11.40), 用满秩矩阵  $\dot{M}_0$ , 可得 (11.8) ~ (11.10) 的表示式。 证毕

**定理 11.4** 博弈  $\Gamma = (A, B, M)^*$  的解  $x = (x_1, \dots, x_m)$ ,  $y = (y_1, \dots, y_n)$  为基本解的充要条件是存在有矩阵  $M$  的满秩子矩阵  $\dot{M}$  ( $r \times r$  矩阵),  $J_r (\text{adj } \dot{M}) J_r^T \neq 0$ , 且下面条件成立:

$$\dot{x} = \frac{J_r \text{adj } \dot{M}}{J_r (\text{adj } \dot{M}) J_r^T}, \quad (11.41)$$

$$\dot{y} = \frac{J_r (\text{adj } \dot{M})^T}{J_r (\text{adj } \dot{M}) J_r^T}, \quad (11.42)$$

$$v_r = \frac{|\dot{M}|}{J_r (\text{adj } \dot{M}) J_r^T}, \quad (11.43)$$

此处  $\dot{x}[\dot{y}]$  是从  $x[y]$  中去掉与构成  $\dot{M}$  时, 从  $M$  中去掉的行[列]相对应的分量所得的向量。

**証明** (i)  $v_r \neq 0$  时: 这时只在  $\dot{M}$  是满秩矩阵时, (11.43) 才成立。因为可以看出, 若  $\dot{M}$  满秩, 则

$$\text{adj } \dot{M} = |\dot{M}| \dot{M}^{-1},$$

由定理 11.3 直接可知本定理成立。

(ii)  $v_r = 0$  时: 这时任意取一个常数  $b \neq 0$ , 用下面的赢得构成新博弈  $I' = (A, B, M)^*$ :

$$M'(\alpha_i, \beta_j) = M(\alpha_i, \beta_j) + b \cdot a_{ij} + b, \quad \begin{matrix} i=1, \dots, m; \\ j=1, \dots, n. \end{matrix} \quad (11.44)$$

即这个博弈  $I'$  的赢得矩阵  $M'$  是  $M' = (a_{ij} + b)$ 。因而博弈  $I'$  的值是

$$v_{r'} = v_r + b \neq 0, \quad (11.45)$$

博弈  $I'$  中的局中人 1, 2 的最优策略集合分别用  $X', Y'$  表示, 很明显,

$$X', Y', X'^*, Y'^* = X, Y, X^*, Y^*. \quad (11.46)$$

从而根据 (11.45), 由 (i) 的证明可得出, 为要  $x, y$  是博弈  $I'$  的基本解 (根据 (11.46),  $x, y$  为博弈  $I'$  的基本解), 其充要条件是存在矩阵  $M'$  的满秩子矩阵  $\dot{M}' (r \times r \text{ 矩阵})$ ,  $J_r(\text{adj } \dot{M}') J_r^T \neq 0$  且使得:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \frac{J_r \text{adj } \dot{M}'}{J_r(\text{adj } \dot{M}') J_r^T}, \quad \dot{y} = \frac{J_r(\text{adj } \dot{M}')^T}{J_r(\text{adj } \dot{M}') J_r^T}, \\ v_{r'} &= v_r + b = \frac{|\dot{M}'|}{J_r(\text{adj } \dot{M}') J_r^T}. \end{aligned} \quad (11.47)$$

由矩阵计算, 容易知道 (例如参考 McKinsey [3]) 下面关系成立:

$$\begin{aligned} J_r \text{adj } \dot{M}' &= J_r \text{adj } \dot{M}, \\ |\dot{M}'| &= |\dot{M}| + b J_r(\text{adj } \dot{M}) J_r^T. \end{aligned} \quad (11.48)$$

因而將(11.48)代入(11.47), 得(11.41)~(11.43), 所以定理得証。証畢

**定理 11.5** 博奕  $\Gamma = (A, B, M)$  有有限个基本解, 且局中人 1, 2 的最优策略集合  $X, Y$  都构成多面体。

**証明** 根据定理 11.4, 博奕  $\Gamma$  的贏得矩陣  $M$  的子方陣一定是博奕  $\Gamma$  的某一个基本解的核。反之, 任意的基本解的核都和某一个  $M$  的子方陣相对应。因而基本解的数不能超过矩陣  $M$  的子方陣的数目, 所以  $X^*, Y^*$  都是由有限个元素所組成。又因为集合  $X, Y$  分别是  $X^*, Y^*$  的凸集合, 所以  $X, Y$  每一个都是以  $X^*, Y^*$  为頂点的多面体。証畢

**注意 11.1** 矩陣博奕所有解的确定法: 根据定理 11.4, 我們能够系統地求出任意矩陣博奕  $G = (A, B, M)$  的混合扩充博奕  $\Gamma$  的所有解。即按下面次序进行。

- (1) 取贏得矩陣  $M$  的  $r$  阶子方陣  $\dot{M}$ ,  $r = 1, 2, \dots, \min(m, n)$ 。
- (2) 根据公式(11.41)~(11.43)計算向量  $\dot{x}, \dot{y}$  和值  $v_r$ , 然后檢驗  $\dot{x}, \dot{y}$  是否属于  $S_r$ 。
- (3) 若  $\dot{x}, \dot{y}$  不同时属于  $S_r$ , 将这个子矩陣舍去。
- (4) 若  $\dot{x}, \dot{y}$  同时属于  $S_r$ , 在  $\dot{x}, \dot{y}$  的对应于由  $M$  作矩陣  $\dot{M}$  时去掉的行和列的位置上, 都添加分量 0, 分別扩大为  $m$  維,  $n$  維的向量  $x, y$ 。然后檢驗下面条件是否成立:

$$M(\alpha_i, y) \leq v_r \leq M(x, \beta_j) \quad (i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, n). \quad (11.49)$$

- (5) 若  $x, y$  不滿足条件(11.49), 将这个  $x, y$  舍去。
- (6) 若  $x, y$  滿足条件(11.49), 則  $(x, y)$  就是博奕  $\Gamma$  的基本解。

按照这样作法, 从矩陣  $M$  的所有子方陣得到的所有基本解  $(x, y)$ , 就是博奕  $\Gamma$  的全部基本解。若博奕  $\Gamma$  的所有基本解已能求出, 依照定理 11.2 就能得出博奕  $\Gamma$  的所有解。

**注意 11.2** 作为矩陣博奕的解法, 注意 11.1 所述的方法并不是最有效的方法。有时也可用綫性规划的計算法, 和几何学上的图象来解更为便利(参考 Luce and Raiffa [2])。关于这些計算法, 在此不另作介紹了。



## § 12 2人无限零和博弈

到现在为止我们只是在局中人的纯策略数目为有限 (有限博弈) 的前提下进行了讨论。下面将考察这个前提不存在时的 2 人零和博弈 (2 人无限零和博弈)。

设局中人 1, 2 的纯策略  $\alpha, \beta$  全体的集合分别为  $A$  与  $B$  (无限集合), 局中人 1, 2 分别取纯策略  $\alpha, \beta$  时, 局的结果对局中人 1 的期望效用 (赢得) 为  $M(\alpha, \beta)$ , 对局中人 2 的赢得为  $-M(\alpha, \beta)$ . 设由集合  $A, B$  的子集合所构成的某 Borel 集合体分别为  $\mathfrak{A}$  和  $\mathfrak{B}$ , 其上的概率测度  $\xi$  及  $\eta$  分别称为局中人 1, 2 的混合策略。局中人 1, 2 的混合策略全体的集合分别记为  $\mathfrak{E}$  与  $\mathfrak{H}$ . 局中人 1 取混合策略  $\xi$  的意义是: 使用纯策略  $\alpha \in A$ , 按照某一机遇装置在  $\mathfrak{A}$  的含有  $\alpha$  的任意元素  $a$  中, 出现  $\alpha$  的概率为  $\xi(\alpha)$ . 对于局中人 2 使用混合策略  $\eta$ , 其意义也作同样理解。在博弈  $G = (A, B, M)$  中, 对各局中人可以用混合策略  $\xi \in \mathfrak{E}, \eta \in \mathfrak{H}$  的博弈, 称为博弈  $G$  的混合扩充博弈, 用  $\Gamma = (A, B, M)^*$  表示。局中人 1, 2 分别用混合策略 (以后简称策略)  $\xi, \eta$  时, 局中人 1 的赢得  $M(x, y)$  由下式给出:

$$M(\xi, \eta) = \int_A \int_B M(\alpha, \beta) d\xi d\eta. \quad (12.1)$$

本节将研究对于纯策略的集合  $A, B$  或赢得函数  $M(\alpha, \beta)$ , 在什么条件下, 博弈  $\Gamma$  中 minimax 定理成立, 也就是怎样使下面等式成立的问题:

$$\sup_{\xi} \inf_{\eta} M(\xi, \eta) = \inf_{\eta} \sup_{\xi} M(\xi, \eta). \quad (12.2)$$

在博弈  $\Gamma = (A, B, M)^*$  中, 若等式 (12.2) 成立, 则称此博弈为**完全确定的** (strictly determined)。两边公共的值称为博弈  $\Gamma = (A, B, M)^*$  的值, 用  $v_\Gamma$  或  $v(A, B)$  表示。如果  $A, B$  都是有限集合,

象定理 10.1 中所指出的, 博弈  $\Gamma = (A, B, M)^*$  是完全确定的。但是若  $A, B$  是无限集合, 则由下面的例子可以看出, 等式 (12.2) 并不一定完全成立。

**例 12.1**  $A, B$  都是正整数全体的集合, 考察用下面式子定义赢得函数  $M(\alpha, \beta)$  的博弈  $\Gamma = (A, B, M)^*$ :

$$M(\alpha, \beta) = \begin{cases} 1, & \text{若 } \alpha > \beta, \\ 0, & \text{若 } \alpha = \beta, \\ -1, & \text{若 } \alpha < \beta. \end{cases}$$

很明显, 在这个博弈中,

$$\inf_{\eta} \sup_{\xi} M(\xi, \eta) = +1, \quad \sup_{\xi} \inf_{\eta} M(\xi, \eta) = -1.$$

所以它不是完全确定的。

我们再来研究博弈  $\Gamma = (A, B, M)^*$  是完全确定的意义。和有限博弈的情况一样, 使

$$\inf_{\eta} M(\xi^0, \eta) \geq \inf_{\eta} M(\xi, \eta), \quad \text{对所有的 } \xi \in E \quad (12.3)$$

成立的策略  $\xi^0 \in E$ , 称为局中人 1 的 **maximin 策略**。使

$$\sup_{\xi} M(\xi, \eta^0) \leq \sup_{\xi} M(\xi, \eta), \quad \text{对所有的 } \eta \in H \quad (12.4)$$

成立的策略  $\eta^0 \in H$ , 称为局中人 2 的 **minimax 策略**。若博弈  $\Gamma$  为完全确定的, 当局中人 1 的 maximin 策略  $\xi^0$ , 和局中人 2 的 minimax 策略  $\eta^0$  存在时, 它们就是博弈的平衡点, 于是和有限博弈的情形一样, 可以证明, 对所有的  $\xi \in E, \eta \in H$ , 下面不等式成立:

$$M(\xi, \eta^0) \leq M(\xi^0, \eta^0) = v_{\Gamma} \leq M(\xi^0, \eta). \quad (12.5)$$

从而, 若博弈  $\Gamma$  为完全确定的, 可以局中人 1 的 maximin 策略  $\xi^0$  和局中人 2 的 minimax 策略  $\eta^0$  的组  $(\xi^0, \eta^0)$  定义为博弈  $\Gamma$  的**解**, 将  $v_{\Gamma}$  定义为博弈  $\Gamma$  的**值**。相反, 若博弈  $\Gamma$  不是完全确定的, 这时和有限博弈的情况一样, 不存在博弈的平衡点, 因而也谈不到博弈的解。

又若博弈  $I$  是完全确定的, 虽然有时不存在 maximin 策略, 或者 minimax 策略, 但对于任意的正数  $\varepsilon$ , 很明显地, 总存在有满足下面条件的局中人 1, 2 的策略  $\xi^*, \eta^*$ :

$$\inf_{\eta} M(\xi^*, \eta) \geq v_I - \varepsilon, \sup_{\xi} M(\xi, \eta^*) \leq v_I + \varepsilon. \quad (12.6)$$

这样, 策略  $\xi^*, \eta^*$  分别称为局中人 1, 2 的  $\varepsilon$ -最优策略。

和辅助定理 9.1 一样, 在无限博弈的情况, 下面辅助定理成立。

**辅助定理 12.1** 下面不等式成立:

$$\sup_{\xi} \inf_{\eta} M(\xi, \eta) \leq \inf_{\eta} \sup_{\xi} M(\xi, \eta). \quad (12.7)$$

在局中人 1, 2 的纯策略集合  $A$  和  $B$  上, 用下列式子定义距离  $\delta_B$  及  $\delta_A$ :

$$\delta_B(\alpha_1, \alpha_2) = \sup_{\beta \in B} |M(\alpha_1, \beta) - M(\alpha_2, \beta)| \quad (\alpha_1, \alpha_2 \in A), \quad (12.8)$$

$$\delta_A(\beta_1, \beta_2) = \sup_{\alpha \in A} |M(\alpha, \beta_1) - M(\alpha, \beta_2)| \quad (\beta_1, \beta_2 \in B). \quad (12.9)$$

显然, 函数  $\delta_B, \delta_A$  满足距离的条件。但是  $A$  或  $B$  的两个不同元素间的距离, 可能为零。现在用  $a_\alpha$  表示到  $A$  的任意元素  $\alpha$  距离为零的所有元素集合。则对于  $A$  的任意两个元素  $\alpha', \alpha''$ , 显然, 只有两种可能性: 或者  $a_{\alpha'} \cap a_{\alpha''} = \emptyset$ , 或者  $a_{\alpha'} = a_{\alpha''}$ 。记这种子集全体的集为  $A^*$ , 则对于  $A^*$  的任意两个不同的元素  $\alpha_1^*, \alpha_2^*$ , 存在有  $A$  的元素  $\alpha_1, \alpha_2$ , 使得  $\alpha_1^* = a_{\alpha_1}, \alpha_2^* = a_{\alpha_2}$ , 这时可用下式定义  $A^*$  中的距离  $\delta_B^*$ :

$$\delta_B^*(\alpha_1^*, \alpha_2^*) = \delta_B(\alpha_1, \alpha_2). \quad (12.10)$$

这个值 (12.10) 对于  $\alpha_1^*, \alpha_2^*$  中  $A$  的任意元素  $\alpha_1, \alpha_2$  其值不变。

对于空间  $B$ , 也可用同样的方法构成距离空间  $B^*$ 。在空间  $A^*[B^*]$  中, 不同的两元素间的距离恒为正。从局中人 1 的行动方针来看, 使  $\delta_B(\alpha_1, \alpha_2) = 0$  的两个策略  $\alpha_1, \alpha_2$ , 对于局中人 1 并没有区别。对局中人 2 也是一样。现在, 局中人 1, 2 的可取纯策略

分别是  $A^*$ ,  $B^*$  的元素, 对于各元素  $\alpha^* (=a_\alpha)$ ,  $\beta^* (=b_\beta)$  的赢得函数  $M^*(\alpha^*, \beta^*)$ , 有

$$M^*(\alpha^*, \beta^*) = M(\alpha, \beta), \quad (12.11)$$

考虑用此定义的博奕  $I^* = (A^*, B^*, M^*)$ , 也在本质上和博奕  $I = (A, B, M)^*$  是没有区别的。(用 (12.11) 定义的函数  $M^*$ , 显然是确定的, 而与从  $\alpha^*, \beta^*$  中  $A, B$  的元素  $\alpha, \beta$  的取法无关。) 因而不失一般性, 在博奕  $G = (A, B, M)$  中, 从开始就允许假定  $A[B]$  的两个不同元素间距离  $\delta_B[\delta_A]$  是正的, 来进行讨论, 以后我们就总是这样规定。

设含有这样的距离空间  $A[B]$  的所有开集的最小 Borel 集合体为  $\mathfrak{A}[\mathfrak{B}]$ , 局中人 1[2] 的混合策略  $\xi[\eta]$  是  $\mathfrak{A}[\mathfrak{B}]$  上的任意概率测度。再  $A, B$  的乘积为  $C = A \times B$ , 在  $C$  的子集合所构成的 Borel 集合体上, 含有  $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$  的任意元素乘积的最小 Borel 集合体为  $\mathfrak{C}$ 。赢得函数  $M(\alpha, \beta)$  是  $\alpha, \beta$  的有界可测 ( $\mathfrak{C}$ ) 函数。

**辅助定理 12.2** 对于博奕  $I = (A, B, M)^*$ , 如果距离空间  $A, B$  有一个全有界, 则另外一个空间也全有界。

**证明** 现在设空间  $A$  对于距离  $\delta_B$  全有界。也就是对于任意的正数  $\varepsilon_1$ , 存在  $A$  的元素的有限集合  $a = \{\alpha_1, \dots, \alpha_m\}$ , 在  $A$  中是  $\varepsilon_1$ -稠密。即存在有限集合  $a = \{\alpha_1, \dots, \alpha_m\}$  使得对于任意的元素  $\alpha \in A$ , 有  $\min_{1 \leq i \leq m} \delta_B(\alpha, \alpha_i) \leq \varepsilon_1$ 。现在用集合  $a$ , 并用下面的式子定义集合  $B$  上的距离  $\delta_a$ :

$$\delta_a(\beta_1, \beta_2) = \max_{1 \leq i \leq m} |M(\alpha_i, \beta_1) - M(\alpha_i, \beta_2)| \quad (\beta_1, \beta_2 \in B), \quad (12.12)$$

分几步来进行证明。

(i) 对于任意的正数  $\varepsilon_2$ , 存在  $B$  的有限集合  $b = \{\beta_1, \dots, \beta_n\}$ , 在距离  $\delta_a$  的意义下, 于  $B$  中是  $\varepsilon_2$ -稠密的: 现在假设这个命题 (i) 不成立, 则存在  $B$  的元素的无限列  $\{\beta_k\}$  ( $k=1, 2, \dots$ ), 使

$$\delta_a(\beta_i, \beta_j) > \varepsilon_2 \quad (i \neq j). \quad (12.13)$$

但由假定, 函数  $M(\alpha, \beta)$  是有界的, 所以固定任意  $i (i=1, 2, \dots, m)$ , 实数列  $M(\alpha_i, \beta_k) (k=1, 2, \dots)$  有极限点。所以存在无限列  $\{\beta_{k_j}\}$  的子列  $\{\beta_{k_{j_1}}\}$ , 使

$$\lim_{j \rightarrow \infty} M(\alpha_i, \beta_{k_{j_1}}) = l_i \quad (i=1, 2, \dots, m), \quad (12.14)$$

此处  $l_i$  为极限值。因此, 若正整数  $N$  充分大, 当  $j_1, j_2 > N$  时,

$$|M(\alpha_i, \beta_{k_{j_1}}) - M(\alpha_i, \beta_{k_{j_2}})| < \varepsilon_2 \quad (j=1, \dots, m) \quad (12.15)$$

成立, 所以

$$\delta_a(\beta_{k_{j_1}}, \beta_{k_{j_2}}) < \varepsilon_2, \quad (12.16)$$

这和(12.13)矛盾, 所以(i)得证。

(ii) 对任意的  $\beta_1, \beta_2 \in B$ , 下面不等式成立:

$$|\delta_A(\beta_1, \beta_2) - \delta_a(\beta_1, \beta_2)| \leq 2\varepsilon_1. \quad (12.17)$$

由集合  $a$  的构成可知, 对于任意的  $\alpha \in A$ , 存在  $i (1 \leq i \leq m)$ , 使得

$$\delta_B(\alpha, \alpha_i) = \sup_{\beta \in B} |M(\alpha, \beta) - M(\alpha_i, \beta)| < \varepsilon_1. \quad (12.18)$$

所以, 对于任意的  $\alpha \in A$ ,

$$\begin{aligned} & |M(\alpha_1, \beta_1) - M(\alpha, \beta_2)| \\ & \leq |M(\alpha, \beta_1) - M(\alpha_i, \beta_1)| + |M(\alpha_i, \beta_1) - M(\alpha_i, \beta_2)| \\ & \quad + |M(\alpha_i, \beta_2) - M(\alpha, \beta_2)| \\ & \leq \varepsilon_1 + \delta_a(\beta_1, \beta_2) + \varepsilon_1 = \delta_a(\beta_1, \beta_2) + 2\varepsilon_1, \end{aligned}$$

从而

$$\delta_A(\beta_1, \beta_2) \leq \delta_a(\beta_1, \beta_2) + 2\varepsilon_1.$$

亦即命题(ii)得证。

由(i), (ii)可知, 在集合  $B$  中,  $B$  的元素的有限集合  $b$ , 在距离  $\delta_A$  的意义下是  $\varepsilon_2 + 2\varepsilon_1$ -稠密。因为  $\varepsilon_1, \varepsilon_2$  是任意的正数, 所以空间  $B$  对于任意的正数  $\varepsilon$ , 具有在距离  $\delta_A$  的意义下是  $\varepsilon$ -稠密的有限子集合。亦即, 若空间  $A$  全有界, 则空间  $B$  也全有界。证毕

**定理 12.1** 在博奕  $\Gamma = (A, B, M)^*$  中, 若空间  $A, B$  有一个

全有界, 则博弈  $\Gamma$  是完全确定的。也就是说下面等式成立:

$$\sup_{\xi} \inf_{\eta} M(\xi, \eta) = \inf_{\eta} \sup_{\xi} M(\xi, \eta). \quad (12.19)$$

**证明** 根据辅助定理 12.2, 在这个定理的条件下, 空间  $A, B$  都是全有界的。因此, 对于任意的正数  $\varepsilon$ , 存在有  $A[B]$  的有限子集  $A_1, \dots, A_m [B_1, \dots, B_n]$ , 使得

$$A = \sum_{i=1}^m A_i, \quad A_i \cap A_j = \emptyset \quad (i \neq j),$$

$$\left[ B = \sum_{j=1}^n B_j, \quad B_i \cap B_j = \emptyset \quad (i \neq j) \right]$$

且各子集合  $A_i [B_j]$  的直径不超过  $\varepsilon$ 。这时从各  $A_i [B_j]$  中任意取一个元素  $\alpha_i [\beta_j]$ , 使其固定不变。定义

$$a = \{\alpha_1, \dots, \alpha_m\} \quad [b = \{\beta_1, \dots, \beta_n\}].$$

然后, 构成用下面式子定义的混合策略  $\xi_a [\eta_b]$ , 这个式子是对应于局中人 1 [2] 的任意混合策略  $\xi [\eta]$ , 在  $a [b]$  上的概率分布。即

$$\begin{aligned} \xi_a(\alpha_i) &= \xi(A_i) \quad (i = 1, \dots, m), \\ \eta_b(\beta_j) &= \eta(B_j) \quad (j = 1, \dots, n). \end{aligned} \quad (12.20)$$

则对任意的  $\eta \in H$ ,

$$\begin{aligned} & |M(\xi, \eta) - M(\xi_a, \eta)| \\ &= \left| \sum_i \int_{A_i} M(a, \eta) d\xi - \sum_i \int_{A_i} M(\alpha_i, \eta) d\xi \right| \\ &\leq \sum_i \int_{A_i} |M(a, \eta) - M(\alpha_i, \eta)| d\xi \leq \sum_i \int_{A_i} \delta_H(a, \alpha_i) d\xi \\ &\leq \sum_i \int_{A_i} \varepsilon d\xi = \varepsilon. \end{aligned}$$

即

$$|M(\xi, \eta) - M(\xi_a, \eta)| \leq \varepsilon, \quad \text{对于所有的 } \eta \in H. \quad (12.21)$$

同样, 下面不等式也成立:

$$|M(\xi, \eta) - M(\xi, \eta_b)| \leq \varepsilon, \quad \text{对于所有的 } \xi \in E. \quad (12.22)$$

現在將本定理分为几步进行証明。

(i) 下面不等式成立:

$$\sup_{\xi} \inf_{\eta} M(\xi, \eta) - \varepsilon \leq \sup_{\xi_a} \inf_{\eta_b} M(\xi_a, \eta_b). \quad (12.23)$$

事实上, 由 (12.21) 可知, 对于任意的  $\xi \in E$ , 下面不等式成立:

$$M(\xi, \eta) - \varepsilon \leq M(\xi_a, \eta) \quad (\text{对于所有的 } \eta \in H).$$

因此

$$\inf_{\eta} M(\xi, \eta) - \varepsilon \leq \inf_{\eta} M(\xi_a, \eta). \quad (12.24)$$

現在假定不等式:

$$\sup_{\xi} \inf_{\eta} M(\xi, \eta) - \varepsilon > \sup_{\xi_a} \inf_{\eta} M(\xi_a, \eta) \quad (12.25)$$

成立, 則存在  $A$  上的概率测度  $\xi^*$ , 使

$$\inf_{\eta} M(\xi^*, \eta) - \varepsilon > \sup_{\xi_a} \inf_{\eta} M(\xi_a, \eta).$$

因此, 取对应于这个概率测度  $\xi^*$  的概率测度  $\xi_a^*$ , 則

$$\inf_{\eta} M(\xi^*, \eta) - \varepsilon > \inf_{\eta} M(\xi_a^*, \eta),$$

这与 (12.24) 矛盾, 所以不等式 (12.25) 不能成立, 因而下面不等式成立:

$$\sup_{\xi} \inf_{\eta} M(\xi, \eta) - \varepsilon \leq \sup_{\xi_a} \inf_{\eta} M(\xi_a, \eta). \quad (12.26)$$

此外, 显然有

$$\sup_{\xi_a} \inf_{\eta} M(\xi_a, \eta) \leq \sup_{\xi_a} \inf_{\eta_b} M(\xi_a, \eta_b). \quad (12.27)$$

所以, 由 (12.26), (12.27) 可知 (12.23) 成立。

(ii) 同理, 下面不等式成立:

$$\sup_{\xi_a} \inf_{\eta_b} M(\xi_a, \eta_b) \leq \sup_{\xi} \inf_{\eta} M(\xi, \eta) + \varepsilon. \quad (12.28)$$

(iii) 由 (12.23), (12.28) 得

$$\begin{aligned} \sup_{\xi} \inf_{\eta} M(\xi, \eta) - \varepsilon &\leq \sup_{\xi_a} \inf_{\eta_b} M(\xi_a, \eta_b) \\ &\leq \sup_{\xi} \inf_{\eta} M(\xi, \eta) + \varepsilon. \end{aligned} \quad (12.29)$$

(iv) 和推导不等式(12.29)一样,可得下面不等式:

$$\begin{aligned} \inf_{\eta} \sup_{\xi} M(\xi, \eta) - \varepsilon &\leq \inf_{\eta_b} \sup_{\xi_a} M(\xi_a, \eta_b) \\ &\leq \inf_{\eta} \sup_{\xi} M(\xi, \eta) + \varepsilon. \end{aligned} \quad (12.30)$$

(v) 由于可将  $\xi_a$  和  $\eta_b$  看作是有限博弈  $G^* = (a, b, M)$  中局中人 1 和 2 的混合策略, 所以根据对有限博弈已经证明的定理 10.1, 下面等式成立:

$$\sup_{\xi_a} \inf_{\eta_b} M(\xi_a, \eta_b) = \inf_{\eta_b} \sup_{\xi_a} M(\xi_a, \eta_b). \quad (12.31)$$

因而, 由 (12.29) ~ (12.31), 不等式

$$|\sup_{\xi} \inf_{\eta} M(\xi, \eta) - \inf_{\eta} \sup_{\xi} M(\xi, \eta)| \leq 2\varepsilon \quad (12.32)$$

对于任意的正数  $\varepsilon$  成立, 从而等式(12.19)成立。 証毕

設在一局博弈中, 局中人 1[2] 所取純策略集合为  $C[D]$ , 如果这个博弈是完全确定的, 并存在博弈的值且将这个值表示为  $v(C, D)$ , 则由定理 12.1 可直接推出下面定理。

**定理 12.2** 博弈  $\Gamma = (A, B, M)^*$  中, 如果空間  $A, B$  有一个是全有界, 則对于任意的正数  $\varepsilon$ , 存在  $A$  的有限子集合  $a$  和  $B$  的有限子集合  $b$ , 使得

$$|v(A, B) - v(a, B)| \leq \varepsilon, \quad |v(A, B) - v(A, b)| \leq \varepsilon, \quad (12.33)$$

$$|v(A, B) - v(a, b)| \leq \varepsilon. \quad (12.34)$$

**証明** 現在可指出在定理 12.1 的証明中构成的  $A, B$  的有限子集合  $a, b$ , 具有本定理提出的性质。由(12.26)知

$$\begin{aligned} \sup_{\xi} \inf_{\eta} M(\xi, \eta) - \varepsilon &\leq \sup_{\xi_a} \inf_{\eta} M(\xi_a, \eta) \\ &\leq \sup_{\xi} \inf_{\eta} M(\xi, \eta). \end{aligned} \quad (12.35)$$

所以如用定理 12.1, 不等式(12.35)可写为

$$v(A, B) - \varepsilon \leq v(a, B) \leq v(A, B). \quad (12.36)$$

这个不等式(12.36)指出(12.33)的前半部是成立的。对于(12.33)的后半部也可以同样証明。此外用定理 12.1 时, 不等式(12.30)的意义正說明了不等式(12.34)是成立的。 証毕



## 第4章 非零和博弈

### § 13 非合作 $n$ 人博弈

到现在为止我們所考察的博弈都是 2 人零和博弈，也就是两个局中人之間存在真正对抗关系的博弈；因而在这样的博弈中，两个局中人之間进行协商是没有意义的，因为对第一个局中人有利的东西，一定对另一个局中人是~~不利~~的。所以这是一个非合作博弈。本节所要考察的是保留非合作性质，而去掉零和与局中人数目为 2 的条件的一般非合作  $n$  人博弈。

有  $n$  个局中人  $1, 2, \dots, n$ ，局中人  $i$  可任意选取的有限个純策略为  $\alpha_1^{(i)}, \dots, \alpha_{m_i}^{(i)}$ ，这些全体的集合記为  $A_i (i=1, 2, \dots, n)$ 。  $A_i$  上的概率分布，亦即局中人  $i$  的混合策略用  $x^{(i)} = (x_1^{(i)}, \dots, x_{m_i}^{(i)})$  或  $x^{(i)} = \sum_j x_j^{(i)} \alpha_j^{(i)}$  表示 (在此  $x_j^{(i)} \geq 0, \sum_j x_j^{(i)} = 1$ )， $x^{(i)}$  全体的集合，构成  $(m_i - 1)$  維单纯形  $S^{(i)}$ 。各局中人在不知道其他局中人的策略情况下，各自独立地，分別选定策略  $x^{(1)}, \dots, x^{(n)}$ ，这些策略的組用  $x = (x^{(1)}, \dots, x^{(n)})$  表示。当取这些策略时，根据每局的结果給出局中人  $i$  的期望效用 (称为局中人  $i$  的**赢得**)，用  $M_i(x) (i=1, \dots, n)$  表示，另外，各局中人  $i$  都希望决定策略使自己得到大的赢得  $M_i(x)$ 。这样的博弈，称为**非合作  $n$  人博弈** (non-cooperative  $n$ -person game)。我們所要解决的問題是在这样的博弈中，各局中人的最优策略是什么，或者博弈的解是什么，如何来确定等。

各局中人的策略組  $x = (x^{(1)}, \dots, x^{(n)})$  全体的集合  $\Delta$ ，是单纯形  $S^{(i)} (i=1, \dots, n)$  的直乘积集合，构成有界闭凸集合。策略組  $x = (x^{(1)}, \dots, x^{(n)})$  中，只有局中人  $i$  将策略  $x^{(i)}$  改变为  $y^{(i)}$  时的策略組用  $(x; y^{(i)})$  表示。

**定义 13.1** 非合作  $n$  人博奕  $\Gamma_n$  中, 策略組  $x$  满足下面条件时, 称  $x$  为博奕  $\Gamma_n$  的平衡点。

条件(i):

$$M_i(x) = \max_{y^{(i)} \in S^{(i)}} M_i(x; y^{(i)}) \quad (i=1, \dots, n). \quad (13.1)$$

即在策略組  $x = (x^{(1)}, \dots, x^{(n)})$  中, 局中人  $i$  以外的局中人, 保持策略  $x^{(1)}, \dots, x^{(i-1)}, x^{(i+1)}, \dots, x^{(n)}$  不变, 仅局中人  $i$  将策略  $x^{(i)}$  改为其他策略时, 对于他并不有利。这是因为,  $x$  称为平衡点是对所有局中人  $i=1, \dots, n$  来说的。在 2 人零和博奕中所定义的平衡点(定义 9.3), 显然是定义 13.1 的特殊情况。

在策略  $x^{(i)} = \sum x_j^{(i)} \alpha_j^{(i)}$  中, 当  $x_j^{(i)} > 0$  时, 就说策略  $x^{(i)}$  使用純策略  $\alpha_j^{(i)}$ 。在策略組  $x = (x^{(1)}, \dots, x^{(n)})$  中, 如果  $x^{(i)}$  使用  $\alpha_j^{(i)}$ , 则说  $x$  使用  $\alpha_j^{(i)}$ 。

若策略組为  $x = (x^{(1)}, \dots, x^{(n)})$ , 当  $x^{(i)} = \sum x_j^{(i)} \alpha_j^{(i)}$  时,  $M_i(x)$  关于各分量  $x^{(i)}$  是綫性的。即  $M_i(x)$  为

$$M_i(x) = \sum_j x_j^{(i)} M_i(x; \alpha_j^{(i)}). \quad (13.2)$$

从而下面等式成立:

$$\max_{y^{(i)} \in S^{(i)}} M_i(x; y^{(i)}) = \max_j M_i(x; \alpha_j^{(i)}). \quad (13.3)$$

所以  $x$  为平衡点的充要条件是下面的条件(ii)成立。

条件(ii):

$$M_i(x) = \max_j M_i(x; \alpha_j^{(i)}) \quad (i=1, \dots, n). \quad (13.4)$$

再根据(13.2)的关系式, (13.4)的成立与下列事实等价, 即使

$$M_i(x; \alpha_j^{(i)}) < \max_k M_i(x; \alpha_k^{(i)})$$

成立的策略  $\alpha_j^{(i)}$ , 为  $x_j^{(i)} = 0$ 。所以  $x$  是平衡点的充要条件也就是下面的条件(iii)。

条件(iii): 若在  $x$  中使用純策略  $\alpha_j^{(i)}$ , 则恒有

$$M_i(x; \alpha_j^{(i)}) = \max_k M_i(x; \alpha_k^{(i)}) \quad (i=1, \dots, n). \quad (13.5)$$

但在非合作  $n$  人博奕中, 是否总存在有平衡点呢? 为了证明存在定理, 引用下面的不动点定理。

**輔助定理 13.1**① (Brouwer 不动点定理) 設  $S$  为 Euclid 空間的有界閉凸集合。如果从  $S$  到  $S$  的点对点映照  $T$  連續, 則至少存在一个不动点。即至少存在一个点  $x_0 \in S$ , 使  $x_0 = T(x_0)$ 。

为了以后的需要, 这里也将 Brouwer 定理的擴張定理 (角谷不动点定理) 提出。設集合  $S$  的閉凸子集合全体的集为  $\mathfrak{M}(S)$ 。这时从  $S$  到  $\mathfrak{M}(S)$  的点对点集合映照  $\Phi: S \ni x \rightarrow \Phi(x) \in \mathfrak{M}(S)$  中, 若当  $x_n \rightarrow x_0$ ,  $y_n \in \Phi(x_n)$  且  $y_n \rightarrow y_0$  时, 有  $y_0 \in \Phi(x_0)$ , 則称映照  $\Phi$  为**上半連續** (upper semicontinuous)。

**輔助定理 13.2**② (角谷不动点定理) 設  $S$  是 Euclid 空間的有界閉凸集合, 这时若从  $S$  到  $\mathfrak{M}(S)$  的点对点集合映照  $\Phi$  上半連續, 則至少存在一个点  $x_0 \in S$ , 使  $x_0 \in \Phi(x_0)$ 。

用上面的輔助定理, 来証明下面非合作  $n$  人博奕的基本定理。

**定理 13.1** 非合作  $n$  人 (有限) 博奕, 至少存在一个平衡点。

**証明** 用下式定义局中人  $1, 2, \dots, n$  的策略組  $x = (x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(n)})$  的連續函数  $\varphi_{ij}$ :

$$\varphi_{ij}(x) = \max[0, M_i(x; \alpha_j^{(i)}) - M_i(x)]. \quad (13.6)$$

然后用这个函数, 将为  $x$  分量的局中人  $i$  的策略  $x^{(i)} = \sum_j \alpha_j^{(i)} \alpha_j^{(i)}$  变换成下面式子定义的局中人  $i$  的策略  $y^{(i)}$ :

$$y^{(i)} = \sum_j \frac{\alpha_j^{(i)} + \varphi_{ij}(x)}{1 + \sum_k \varphi_{ik}(x)} \alpha_j^{(i)} \quad (i=1, \dots, n). \quad (13.7)$$

显然  $y^{(i)}$  是局中人  $i$  的混合策略。这样变换后的策略組用  $y = (y^{(1)}, \dots, y^{(n)})$  表示。設  $T$  为  $x$  对应于  $y$  的映照 (从  $\Delta$  到  $\Delta$  的点对点映照), 即  $T: \Delta \ni x \rightarrow y \in \Delta$ 。由于集合  $\Delta$  是有界閉凸集合, 且映照  $T$  是連續的, 所以根据輔助定理 13.1, 映照  $T$  中至少存在一个不

① 証明可参考 Hurewicz, Witold and Wallman, Dimension Theory (Princeton University Press, 1948)。

② 参考 Kakutani, A generalization of Brouwer's fixed point theorem, Duke Mathematical Journal, 8 (1941)。

动点。如果能够证明这个不动点就是平衡点, 则定理就得到了证明。现在设存在的不动点为  $x = (x^{(1)}, \dots, x^{(n)})$ ,  $x^{(i)} = \sum_j x_j^{(i)} \alpha_j^{(i)}$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ). 可是策略  $x^{(i)}$  仅使用纯策略  $\alpha_1^{(i)}, \dots, \alpha_{m_i}^{(i)}$  中的某几个, 并设被使用的几个纯策略中, 对于局中人  $i$  最不利的一个为  $\alpha_j^{(i)}$ . 当然有

$$M_i(x; \alpha_j^{(i)}) \leq M_i(x). \quad (13.8)$$

因而根据函数  $\varphi_{ij}$  的定义 (13.6), 这时

$$\varphi_{ij}(x) = 0. \quad (13.9)$$

可是  $x$  是映照  $T$  的不动点, 所以  $x = T(x) = y$ , 即  $x^{(i)} = y^{(i)}$  ( $i = 1, \dots, n$ ). 因此, 根据 (13.7),

$$x_j^{(i)} = \frac{x_j^{(i)} + \varphi_{ij}(x)}{1 + \sum_k \varphi_{ik}(x)} \quad \left( \begin{matrix} j=1, \dots, m_i \\ i=1, \dots, n \end{matrix} \right). \quad (13.10)$$

可是由 (13.9) 和  $\varphi_{ik}(x) \geq 0$ , 可知 (13.10) 和

$$\varphi_{ik}(x) = 0 \quad (k=1, \dots, m_i; i=1, \dots, n) \quad (13.11)$$

是等价的。所以根据函数  $\varphi_{ik}$  的定义 (13.6),

$$M_i(x) \geq M_i(x; \alpha_k^{(i)}) \quad (k=1, \dots, m_i; i=1, \dots, n). \quad (13.12)$$

从而  $M_i(x) = \max_k M_i(x; \alpha_k^{(i)}) \quad (i=1, \dots, n)$ .

也就是对于不动点  $x$ , 成立着为平衡点的充要条件 (ii). 所以不动点  $x$  是平衡点, 于是博奕中的平衡点存在。 証毕

2 人零和 (有限) 博奕恒存在平衡点是这个定理 13.1 的特殊情况。因而, 定理 13.1 包含了定理 10.1. 需注意的是定理 13.1 的证明引用了不动点定理, 而定理 10.1 的证明没有引用此定理。

现在我们看一下对非合作  $n$  人博奕, 试用已经保证存在的平衡点直接定义为博奕  $\Gamma_n$  的解是否合理。事实上, 在 2 人零和博奕的情况, 以平衡点定义为博奕的解是我们所同意的, 其所以被同意, 是因为它具有定理 10.2 中所说的平衡点的特性。可是对一般的非合作  $n$  人博奕的平衡点是否也具有类似的性质呢? 由下面的

說明可以看到,如果去掉了零和的条件,即使是在2人博弈的情况下,也会出现許多困难的問題。

同2人零和博弈时一样,設局中人1,2的純策略全体的集合分別为  $A = \{\alpha_1, \dots, \alpha_m\}$ ,  $B = \{\beta_1, \dots, \beta_n\}$ , 局中人1,2取純策略  $\alpha_i, \beta_j$  时,局的结果  $\omega$  的集合  $\Omega$  上的概率分布为  $\pi_{ij}$ , 相应于这个概率分布的局中人1,2的贏得,分別为  $M_1(\alpha_i, \beta_j) = a_{ij}$ ,  $M_2(\alpha_i, \beta_j) = b_{ij}$ . 可是本章所考察的博弈中,两个局中人不是严格对抗的,所以就不能象零和博弈那样来处理。

在2人博弈中,若是至少存在一組概率分布  $\pi_{ij}$  和  $\pi_{hk}$ , 第一个局中人取  $\pi_{ij}$  比取  $\pi_{hk}$  好,可是另外一个局中人取  $\pi_{hk}$  不比取  $\pi_{ij}$  好,这样的2人博弈称为**非严格对抗的**(non-strictly competitive)。这时,各局中人效用的原点和单位,不論如何取,都不能使等式

$$M_1(\alpha_i, \beta_j) + M_2(\alpha_i, \beta_j) = 0 \quad (i=1, \dots, m; j=1, \dots, n)$$

成立。严格对抗的博弈可以作为零和博弈来处理,但对非严格对抗的博弈,这是不可能的。以后我們將非严格对抗的博弈和**非零和博弈** (non-zero-sum game) 作为同义辞使用。本节就是研究非合作2人非零和博弈,这样的博弈可用表13.1表示。

	$\beta_1$	$\dots$	$\beta_j$	$\dots$	$\beta_n$
$\alpha_1$	$(a_{11}, b_{11})$	$\dots$	$(a_{1j}, b_{1j})$	$\dots$	$(a_{1n}, b_{1n})$
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$
$\alpha_i$	$(a_{i1}, b_{i1})$	$\dots$	$(a_{ij}, b_{ij})$	$\dots$	$(a_{in}, b_{in})$
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$
$\alpha_m$	$(a_{m1}, b_{m1})$	$\dots$	$(a_{mj}, b_{mj})$	$\dots$	$(a_{mn}, b_{mn})$

表 13.1

当局中人1,2分別取混合策略  $x = (x_1, \dots, x_m) \in S_m^{(1)}$ ,  $y = (y_1, \dots, y_n) \in S_n^{(2)}$  时,局中人1,2的贏得  $M_1(x, y)$ ,  $M_2(x, y)$  分別由下面式子給出:

$$M_1(x, y) = \sum_i \sum_j a_{ij} x_i y_j, \quad M_2(x, y) = \sum_i \sum_j b_{ij} x_i y_j. \quad (13.13)$$

現在在以  $u_1$  軸为水平軸,  $u_2$  軸为鉛直軸的坐标平面(称为 **U平面**)

上,取坐标为  $u_1 = M_1(x, y)$ ,  $u_2 = M_2(x, y)$  的点  $P$ , 称为对应策略组  $(x, y)$  的**效用点**。当  $x, y$  分别在  $S_m^{(1)}$ ,  $S_n^{(2)}$  内独立移动时, 效用点全体所成的集合为  $V$ 。  $V$  是  $U$  平面上的一个有界闭集合, 称为非合作博奕的**效用集合**。局中人 1, 2 的任意策略组  $(x, y)$  都对应着  $V$  的一点, 反之,  $V$  的点至少有一组策略组  $(x, y)$  和它对应。要评价非合作 2 人博奕中局中人 1, 2 取策略  $x, y$  时, 它在整个博奕中的作用, 可以从对应于策略  $(x, y)$  的效用点  $P$  在效用集合  $V$  上的位置关系来判断。

我们的问题是要研究在非合作 2 人非零和博奕中, 各局中人的最优策略。

**例 13.1** 考察由表 13.2 给定的非合作 2 人非零和博奕。当局中人 1, 2 分别取混合策略  $x\alpha_1 + (1-x)\alpha_2$ ,  $y\beta_1 + (1-y)\beta_2$  ( $0 \leq x \leq 1$ ,  $0 \leq y \leq 1$ ) 时, 各局中人的赢得  $u_1(x, y)$ ,  $u_2(x, y)$  分别为

$$u_1(x, y) = 5xy - 2(x+y) + 1, \quad u_2(x, y) = 5xy - 3(x+y) + 2.$$

这博奕的平衡点是  $(\alpha_1, \beta_1)$ ,  $(\alpha_2, \beta_2)$  和  $(\frac{3}{5}\alpha_1 + \frac{2}{5}\alpha_2, \frac{2}{5}\beta_1 + \frac{3}{5}\beta_2)$  (记为  $(x^0, y^0)$ ), 容易知道, 除此以外再不存在其他的平衡点。而在这些平衡点上各局中人的赢得如下:

$$M_1(\alpha_1, \beta_1) = 2, \quad M_1(\alpha_2, \beta_2) = 1, \quad M_1(x^0, y^0) = 1/5,$$

$$M_2(\alpha_1, \beta_1) = 1, \quad M_2(\alpha_2, \beta_2) = 2, \quad M_2(x^0, y^0) = 1/5.$$

但是在这个博奕的平衡点上, 局中人 1 (或局中人 2) 所获的赢得是不相等的 (2 人零和博奕时恒相等 (定理 10.2))。此外,  $(\alpha_1, \beta_1)$ ,  $(\alpha_2, \beta_2)$  虽然是平衡点, 但  $(\alpha_1, \beta_2)$  或  $(\alpha_2, \beta_1)$  并不是平衡点, 即这个博奕的平衡点是不可换的 (在 2 人零和博奕时恒可换 (定理 10.2))。因而这个博奕虽存在平衡点, 但是不容易判断应该用哪一个平衡点来定义博奕的解。

这博奕的效用集合  $V$ , 如图 13.1, 是由连接  $a(2, 1)$ ,  $c(-1, -1)$  两点的线段  $ac$ , 以及连接  $b(1, 2)$ ,  $c(-1, -1)$  两点的线段  $bc$ , 和通过  $a, b$  两点的抛物线

$$5u_1^2 - 10u_1u_2 + 5u_2^2 - 2u_1 - 2u_2 + 1 = 0$$

围成的区域。就效用集合  $V$  来考虑, 局中人 1 期望  $u_1$  坐标大的效用点, 局中

人2期望  $u_2$  坐标大的效用点。从图 13.1 直观来看,在  $V$  中使两个局中人都满足的效用点是不存在的。

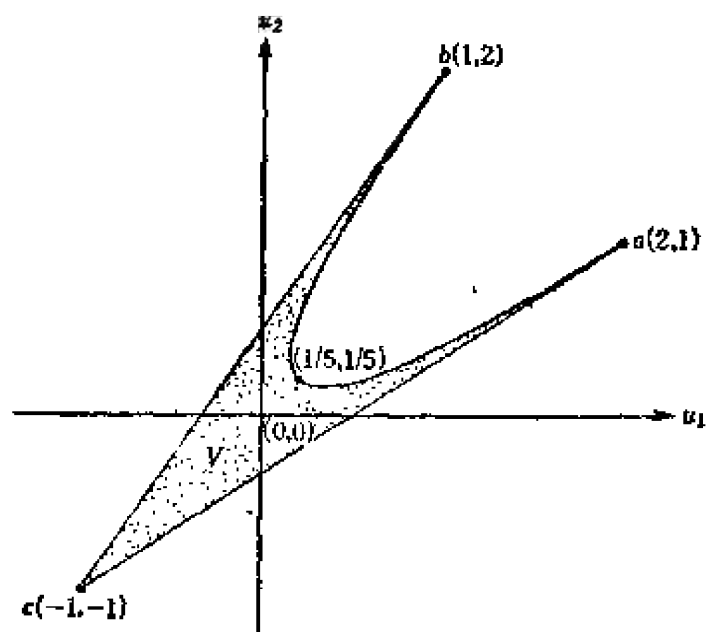


图 13.1

	$\beta_1$	$\beta_2$
$\alpha_1$	$(2, 1)$	$(-1, -1)$
$\alpha_2$	$(-1, -1)$	$(1, 2)$

表 13.2

	$\beta_1$	$\beta_2$
$\alpha_1$	$(0.9, 0.9)$	$(0, 1)$
$\alpha_2$	$(1, 0)$	$(0.1, 0.1)$

表 13.3

**例 13.2** 考察由表 13.3 给定的非合作 2 人非零和博弈。出局中人 1 的立场来看,不论局中人 2 取  $\beta_1$  或取  $\beta_2$ ,  $\alpha_2$  总比  $\alpha_1$  有利。出局中人 2 的立场来看,不论局中人 1 取  $\alpha_1$  或  $\alpha_2$ ,  $\beta_2$  总比  $\beta_1$  有利。因而在这局博弈中,局中人 1, 2 分别取  $\alpha_2, \beta_2$ , 应该是合理的。同时  $(\alpha_2, \beta_2)$  是这个博弈唯一的平衡点,并且  $\alpha_2, \beta_2$  分别是局中人 1, 2 的唯一 maximin 策略。因此,把  $(\alpha_2, \beta_2)$  解释为博弈的解应该是合适的。当然,若允许局中人事先相互协商,则博弈也可能不终止在  $(\alpha_2, \beta_2)$ , 而终止在对两个局中人都有利的  $(\alpha_1, \beta_1)$ , 但我们现在所考虑的是非合作博弈。此外,虽然是非合作博弈,若博弈不限定进行一局,而可以反复进行,则由于局中人完全知道表 13.3, 所以在反复进行过程中,可以想象两个局中人完全有可能默然同意不取  $(\alpha_2, \beta_2)$ , 而终局于  $(\alpha_1, \beta_1)$ 。

如上所述,在非零和博弈中会出现有各种各样问题,可是关于非合作  $n$  人博弈的解, Nash<sup>[5]</sup> 采取了下面的定义:

**定义 13.2** 设非合作  $n$  人博弈的平衡点全体的集合为  $Q$ , 若  $(y; z_i) \in Q$ , 且  $x \in Q$  时,  $(x; z_i) \in Q$  对于所有的  $i=1, 2, \dots, n$  都成立(即平衡点可交换), 则称博弈  $\Gamma_n$  为可解。可解博弈  $\Gamma_n$  的解是平衡点的集合  $Q$ 。

在例 13.1 中所看到的,两个不同的平衡点对各局中人給出的贏得不一定相同,所以关于可解博奕的解定义如下:

$$v_i^+ = \max_{x \in Q} M_i(x), \quad v_i^- = \min_{x \in Q} M_i(x) \quad (i=1, \dots, n),$$

$v_i^+$  称为博奕  $\Gamma_n$  給局中人  $i$  的**上方值** (upper value),  $v_i^-$  称为博奕  $\Gamma_n$  給局中人  $i$  的**下方值** (lower value)。特別当  $v_i^+ = v_i^-$  (設  $= v_i$ ) 时,  $v_i$  称为博奕  $\Gamma_n$  給局中人  $i$  的**值**。

根据定义 13.2, 因为例 13.1 的博奕的平衡点不可換, 所以这个博奕不可解。例 13.2 的博奕, 仅有一个平衡点, 所以博奕可解。而  $(\alpha_2, \beta_2)$  是这个博奕的解, 它給局中人 1 的值是 0.1, 給局中人 2 的值也是 0.1。此外, 根据定理 10.2, 2 人零和博奕在定义 13.2 的意义下是可解的, 而且存在着分別給各局中人 1, 2 的值。

## § 14 合作 2 人博奕

再来考虑前节例 13.1 的博奕。但現在不作為非合作博奕, 而在局开始前, 两个局中人为了求得相互的利益, 允許进行协商 (即所謂合作博奕)。两人协商的結果, 商妥用同等的机会采用  $(\alpha_1, \beta_1)$  和  $(\alpha_2, \beta_2)$ , 并且商定用投擲錢币的办法作为解决这个博奕的一种方案, 商定出現正面时局中人 1, 2 分別取  $\alpha_1, \beta_1$ , 出現反面时分別取  $\alpha_2, \beta_2$ 。这时局中人 1, 2 的贏得是  $3/2, 3/2$ 。而这个效用点  $(3/2, 3/2)$  不包含在非合作博奕的效用集合  $V$  內。也就是合作博奕可以达到对两人都有利的效用点, 但这个点在各局中人独立选定策略的非合作博奕中是不能达到的。很明显, 在这个合作博奕的效用集合  $R$  的内部包含  $V$  的  $\triangle abc$ 。而效用点  $m(3/2, 3/2)$  是边  $ab$  的中点 (图 11.1)。

一般, 若局中人 1, 2 的純策略全体的集合分別为  $A = \{\alpha_1, \dots, \alpha_m\}$ ,  $B = \{\beta_1, \dots, \beta_n\}$ , 允許在局开始前根据两人的协商用概率  $z_{ij}$  (在此  $z_{ij} \geq 0$ ,  $i = 1, \dots, m$ ;  $j = 1, \dots, n$ ,  $\sum_i \sum_j z_{ij} = 1$ ) 取策略組



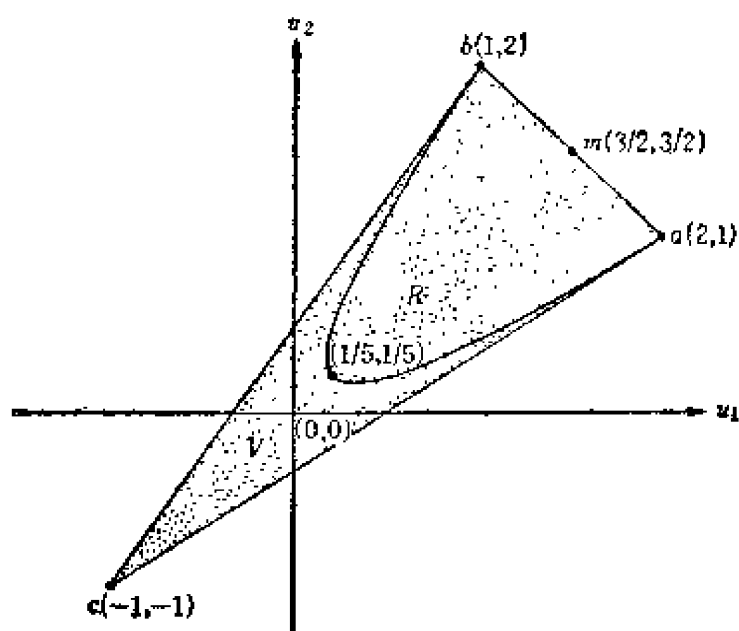


图 14.1

$(\alpha_i, \beta_j)$  ( $i=1, \dots, m; j=1, \dots, n$ ) 的博奕称为**合作2人博奕** (cooperative two-person game)。而这样的方案, 也就是用概率  $z_{ij}$  取纯策略组  $(\alpha_i, \beta_j)$  的方案, 换言之, 纯策略组  $(\alpha_i, \beta_j)$  ( $i=1, \dots, m; j=1, \dots, n$ ) 上的概率分布  $z = \{z_{ij}\}$ ,  $z_{ij} \geq 0, \sum_i \sum_j z_{ij} = 1$ , 称为局中人 1, 2 的**结合混合策略** (joint-mixed strategy)。因而允许结合混合策略的博奕是合作博奕。结合混合策略  $z = \{z_{ij}\}$  全体的集合和  $[(m \times n) - 1]$  维单纯形  $S_{m \times n}$  的点是——对应的。

使用结合混合策略  $z = \{z_{ij}\}$  时, 局中人 1, 2 的赢得  $M_1(z)$ ,  $M_2(z)$ , 分别由下式给出:

$$\begin{aligned} M_1(z) &= \sum_i \sum_j M_1(\alpha_i, \beta_j) z_{ij} = \sum_i \sum_j a_{ij} z_{ij}, \\ M_2(z) &= \sum_i \sum_j M_2(\alpha_i, \beta_j) z_{ij} = \sum_i \sum_j b_{ij} z_{ij}. \end{aligned} \quad (14.1)$$

使这些值  $M_1(z)$ ,  $M_2(z)$  对应于具有  $u_1$  坐标,  $u_2$  坐标的  $U$  平面上的点(对应结合混合策略  $z$  的效用点), 这些点的集合称为合作 2 人博奕的**效用集合**, 用  $R$  表示。局中人 1, 2 各自独立地取混合策略  $x = (x_1, \dots, x_m)$ ,  $y = (y_1, \dots, y_n)$  和用  $z_{ij} = x_i y_j$  的特别的结合混合

策略  $z = \{z_{ij}\}$  是等价的。因而  $R \supset V$ ，而效用集合  $R$  是  $U$  平面上的  $m \times n$  个点  $(M_1(\alpha_i, \beta_j), M_2(\alpha_i, \beta_j))$ ,  $i=1, \dots, m$ ;  $j=1, \dots, n$  组成的集合，从而很明显地是  $V$  的凸集。因而合作 2 人博弈的效用集合  $R$  构成如图 14.2 的(闭)凸多边形。我们的问题是研究效用集合  $R$  中的哪一个点是合作 2 人博弈的解点。

对于  $R$  中的不同两点  $(u'_1, u'_2)$ ,  $(u''_1, u''_2)$ , 若  $u'_1 \geq u''_1$ , 且  $u'_2 \geq u''_2$ , 则称效用点  $(u'_1, u'_2)$  优越于 (dominate) 效用点  $(u''_1, u''_2)$ 。若  $R$  的其他点  $(u_1, u_2)$  都优越于  $R$  的点  $(u'_1, u'_2)$ , 则效用点  $(u'_1, u'_2)$  成为两个局中人都不值得考虑的点(因为这时可实现比  $(u'_1, u'_2)$  对两人更有利的效用点  $(u_1, u_2)$ ), 从而在合作 2 人博弈时, 两局中人所关心的是  $R$  中不被其他点优越的点。这种效用点全体的集合称为效用集合  $R$  的(或者合作 2 人博弈的) **结合最大效用集合** (joint maximal set)。图 14.2 中折线  $abcd$  构成结合最大效用集合。

就在这个结合最大效用集合的点中, 局中人 1 最希望的是  $u_1$  坐标最大的点  $d$ , 局中人 2 最希望的是  $u_2$  坐标最大的点  $a$ 。然而在这个结合最大效用集合上, 两个局中人的利害是完全相反的,

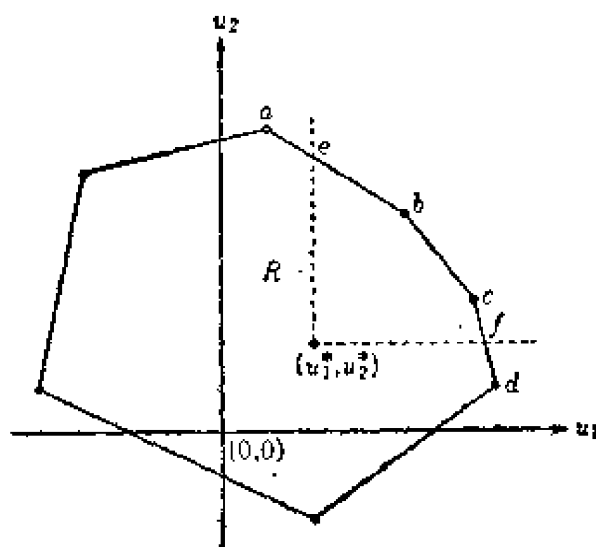


图 14.2

的,也就是在这个结合最大效用集合上的点,要增加  $u_1$  坐标,则就减小  $u_2$  坐标,要增加  $u_2$  坐标,则就减小  $u_1$  坐标。这样,在结合最大效用集合中,到底哪些点能为两人都同意呢?

现在考虑各局中人在没有合作下单独进行的情况。局中人 1[2] 取 maximin 策略所得的安全水准(因而是局中人 1[2] 的最

大安全水准) 设为  $u_1^*[u_2^*]$ . 这样, 局中人 1[2] 用 maximin 策略, 至少可以确保效用  $u_1^*[u_2^*]$ . 因而, 局中人 1[2] 在效用点  $u_1 < u_1^*[u_2 < u_2^*]$  終局, 这是不需要合作的。所以通过效用点  $(u_1^*, u_2^*)$  的水平綫和垂直綫之間的結合最大效用集合的部分称为 **協調效用集合** (negotiation set), 这部分是两局中人关心的对象。图 14.2 中折綫  $ebcf$  构成協調效用集合。

現在的問題是, 協調效用集合中的哪些点, 可以看作是合作博弈的解点。

将例 13.1 的博弈考虑为合作博弈时,  $u_1^* = 1/5$ ,  $u_2^* = 1/5$ , 所以綫段  $ab$  是这个博弈的協調效用集合。直觀上我們可以将綫段  $ab$  的中点  $(3/2, 3/2)$  认为是这个合作博弈的解点(参看图 14.1)。

一般的所謂合作 2 人博弈, 便是給定了效用集合  $R$  和有两局中人的最大安全水准的效用点  $(u_1^*, u_2^*)$ , 所以可将合作 2 人博弈表示为  $[R, (u_1^*, u_2^*)]$ . 将局中人 1, 2 的效用  $u_1, u_2$  作綫性变换, 变换为效用  $u'_1, u'_2$  时(参看定理 4.1), 取水平軸为  $u'_1$  軸, 垂直軸为  $u'_2$  軸的坐标平面叫作  $U'$  平面。 $U$  平面的效用集合  $R$  和点  $(u_1^*, u_2^*)$  在  $U'$  平面上分別为集合  $R'$  和点  $(v_1^*, v_2^*)$  时, 在  $U'$  平面上的合作博弈  $[R', (v_1^*, v_2^*)]$  叫做将各局中人的效用, 实行正一次变换后的表現。此外, 假定效用集合中存在使  $u_1 > u_1^*$ , 且  $u_2 > u_2^*$  的点  $(u_1, u_2)$ . 我們希望在協調效用集合中确定出合作 2 人博弈解点的位置。为此, 必須通过要求滿足的条件, 定义合作 2 人博弈的解。現在对合作 2 人博弈  $[R, (u_1^*, u_2^*)]$ , 使它和  $R$  的点对应的規則用  $F$  表示, 并記对应的点为  $F[R, (u_1^*, u_2^*)]$ .

**定义 14.1** 滿足下面条件 (i) ~ (iv) 的  $R$  的点  $(u_1^0, u_2^0) = F[R, (u_1^*, u_2^*)]$ , 称为在 Nash 意义下合作 2 人博弈  $[R, (u_1^*, u_2^*)]$  的解点。

条件 (i): 設在合作 2 人博弈  $[R, (u_1^*, u_2^*)]$  中, 将各局中人的

效用作正一次变换后的博奕表现为  $[R', (v_1^*, v_2^*)]$ . 则  $F[R, (u_1^*, u_2^*)]$  和  $F[R', (v_1^*, v_2^*)]$  也由同样的正一次变换联系着。

条件(ii):  $F[R, (u_1^*, u_2^*)] = (u_1^0, u_2^0)$ , 则

- 1)  $u_1^0 \geq u_1^*, u_2^0 \geq u_2^*$ ,
- 2)  $R$  中不存在优越于  $(u_1^0, u_2^0)$  的点。

条件(iii): 两个合作 2 人博奕  $[R, (u_1^*, u_2^*)]$  和  $[R', (u_1^*, u_2^*)]$ , 若

- 1)  $R \subset R'$ ,
- 2)  $F[R', (u_1^*, u_2^*)] \in R$ ,

则  $F[R, (u_1^*, u_2^*)] = F[R', (u_1^*, u_2^*)]$ .

条件(iv): 如果合作 2 人博奕  $[R, (u_1^*, u_2^*)]$  满足下面条件:

- 1)  $u_1^* = u_2^*$ ,
- 2) 若  $(u, v) \in R$ , 则  $(v, u) \in R$ ,
- 3)  $F[R, (u_1^*, u_2^*)] = (u_1^0, u_2^0)$ ,

则  $u_1^0 = u_2^0$ .

条件(iii)的意义如下。在两个合作博奕中, 若各局中人的最大安全水准是相同的, 且一个博奕的效用集合包含另一个博奕的效用集合, 这时若具有较大效用集合的博奕解点, 在有较小效用集合的博奕中, 也是可能达到的效用点时, 则有较小效用集合的博奕解点和这点是一致的。

条件(iv)的意义如下。若合作 2 人博奕中, 由效用的适当正一次变换, 使各局中人的位置成为对称, 则在效用的测度上, 解所给出的两个局中人的期望效用是相等的。

当我们在定义 14.1 的意义下, 讨论合作 2 人博奕  $[R, (u_1^*, u_2^*)]$  的解点存在和构成时, 可以变换各局中人的效用, 使  $u_1^*, u_2^*$  成为 0, 因而不失一般性, 可以合作 2 人博奕  $[R, (0, 0)]$  为讨论对象。

**定理 14.1** 合作 2 人博奕  $[R, (0, 0)]$  的解点是  $U$  平面第一象限上效用集合  $R$  中, 使积  $u_1 u_2$  为最大的点  $(u_1^0, u_2^0)$ . (我们假定存在使  $u_1 > 0, u_2 > 0$  的  $R$  的点  $(u_1, u_2)$ , 于是  $R$  是有界闭凸集合,

所以满足本定理条件的点 $(u_1^0, u_2^0)$ 只存在一个。

**証明** 变换各局中人的效用,使得满足定理条件的唯一点 $(u_1^0, u_2^0)$ 变换为点 $(1, 1)$ 。根据这个变换,集合 $R$ 变换为坐标平面 $U'$ 上的集合 $R'$ 。因为在这个效用的变换里各局中人的效用都乘上了正数,所以 $R'$ 仍然是有界闭凸集合。于是 $U'$ 平面上的点 $(1, 1)$ 是 $U'$ 平面的第一象限上 $R'$ 的点 $(u_1, u_2)$ 中,使积 $u_1 u_2$ 为最大的点。我們要証明这个点就是合作2人博奕 $[R', (0, 0)]$ 的解点。为此先証明对于 $R'$ 的任意点 $(u_1, u_2)$ ,必有

$$u_1 + u_2 \leq 2. \quad (14.2)$$

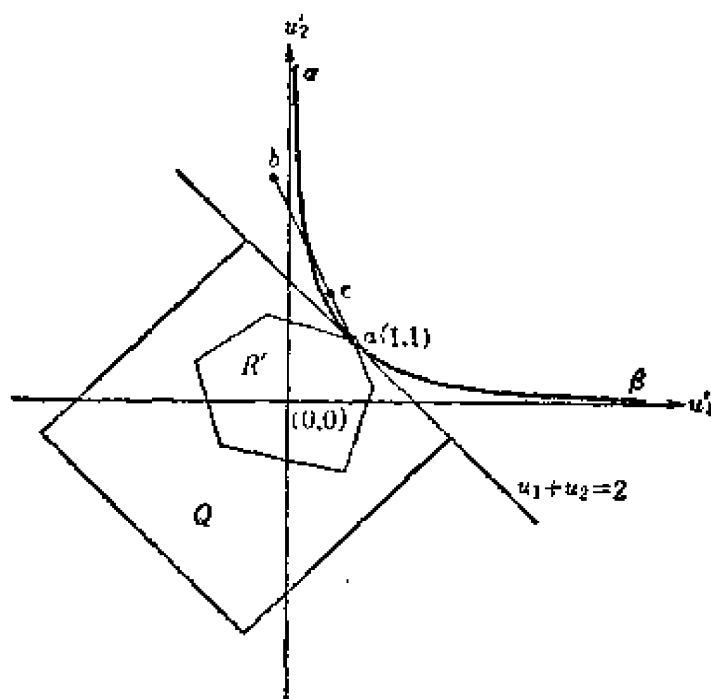


图 14.3

現在設存在 $R'$ 的点 $b = (u_1, u_2)$ , 使 $u_1 + u_2 > 2$ , 于是点 $b$ 在直綫 $u_1 + u_2 = 2$ 的右上方, 因而在連接点 $a = (1, 1)$ 和点 $b$ 的綫段 $ab$ 上, 存在包含于双曲綫 $u_1 u_2 = 1$ 的第一象限分支 $\alpha\beta$ 内部的点 $c = (u'_1, u'_2)$ 。就这一点 $c(u'_1, u'_2)$ 来看,  $u'_1 u'_2 > 1$ 。另一方面,  $a, b \in R'$ ,  $R'$ 是凸集合, 所以 $c \in R'$ 。这和点 $a = (1, 1)$ 的上述性质矛盾。所以(14.2)成立。换言之, 直綫 $u_1 + u_2 = 2$  (是双曲綫 $\alpha\beta$ 在

点  $a(1, 1)$  处的切线)即为有界闭凸集合  $R'$  的支持线(supporting line). 因而, 存在有半平面  $u_1 + u_2 \leq 2$  上的正方形  $Q$ , 其一边落在直线  $u_1 + u_2 = 2$  上, 关于直线  $u_1 = u_2$  对称, 且其内部完全包含  $R'$ . 于是考虑以正方形  $Q$  为效用集合的合作 2 人博奕  $[Q, (0, 0)]$ . 根据条件(iv)和条件(ii), 博奕  $[Q, (0, 0)]$  的解点由点  $a = (1, 1)$  给出. 而且  $a \in R'$ . 所以由条件(iii), 点  $a = (1, 1)$  又是博奕  $[R', (0, 0)]$  的解点. 从而根据条件(i)知道, 原来合作博奕  $[R, (0, 0)]$  的解点是满足定理条件的唯一点. 证毕

将这个定理 14.1 用于作为合作博奕的例 13.1 上, Nash 意义的解不外是我们以前由直观得出的解  $(3/2, 3/2)$ .

## § 15 交涉 2 人博奕

现在我们考虑对两个行动主体, 相互间进行着讨价还价的对抗如何构造为博奕模型的问题. 在所要构成的博奕中, 两个局中人 1, 2 可选取的纯策略集合分别为  $A = \{\alpha_1, \dots, \alpha_m\}$ ,  $B = \{\beta_1, \dots, \beta_n\}$ , 并把局中人 1, 2 取纯策略  $\alpha_i, \beta_j$  时的期望效用, 和以前一样记作  $M_1(\alpha_i, \beta_j), M_2(\alpha_i, \beta_j)$ . 在博奕  $I$  中, 允许在一局开始前, 经过磋商, 然后结合着使用任意的结合混合策略  $z = \{z_{ij}\}$ . ( $z_{ij} \geq 0, \sum \sum z_{ij} = 1$ .) 对应于所有结合混合策略  $z \in S_{m \times n}$  的  $U$  平面上效用点的全体(效用集合), 和以前同样, 用  $R$  表示. 这里所考虑的博奕  $I$ , 与上节合作 2 人博奕不同之处是各局中人可以相互威胁(threaten)对方. 这里所谓局中人 1[2] 威胁局中人 2[1], 是指局中人 1[2] 作如下的声明: 即当自己提出的某要求, 若(或因为局中人 2[1] 不合作或者因为博奕的条件)得不到满足时, 自己将使用某一混合策略  $x = (x_1, \dots, x_m) \in S^{(1)}$  [ $y = (y_1, \dots, y_n) \in S^{(2)}$ ]. 这个作为威胁的策略  $x[y]$ , 一般对于局中人 1[2] 不一定是所希望的, 因而象“威胁”的涵义那样, 假定在局中人  $j$  不答应局中人  $i$  的

要求时,局中人  $i$  才被迫使用自己作为“威胁”的策略。

如果作了威胁以后并不付之实行,那就失去了威胁的意义。

另外,将局中人  $i$  的**要求** (demand) 定义为他至少必须获得效用  $d_i$ .

例如局中人 1 要求局中人 2 和自己合作采取结合混合策略  $z = \{z_{ij}\}$ , 局中人 1 的要求  $d_1$  表示为  $d_1 = \sum \sum M_1(\alpha_i, \beta_j) z_{ij}$ .

设博奕  $\Gamma$  经过下面四个阶段终止。

第 1 阶段: 局中人 1[2] 选定特定的策略  $x[y]$ . 这是局中人 1[2] 对局中人 2[1] 表示“威胁”的策略。当局中人 1[2] 在自己的要求达不到时,才使用这个策略  $x[y]$ .

第 2 阶段: 各局中人将自己取的“威胁”策略告诉对方。

第 3 阶段: 局中人 1, 2 各自独立决定的要求分别为  $d_1, d_2$ .

第 4 阶段: (1) 若效用集合  $R$  中,存在  $u_1 \geq d_1$  且  $u_2 \geq d_2$  的点  $(u_1, u_2)$ , 使博奕的局终止。这时局中人 1, 2 的赢得分别是  $d_1, d_2$ .

(2) 若效用集合  $R$  中,不存在(1)中的效用点  $(u_1, u_2)$ , 各局中人使用自己选定的“威胁”策略  $x, y$ , 使局告终止。这时局中人 1, 2 的赢得分别是  $M_1(x, y), M_2(x, y)$ .

这样规定的博奕称为**交涉 2 人博奕** (negotiation game)。本节的目的是要说明在交涉 2 人博奕中,各局中人的最优“威胁”策略是什么,最优要求是什么。

在这个交涉博奕  $\Gamma$  的四个阶段中,只有第 1, 3 阶段必需由局中人决定,而第 2, 4 阶段是不需要由局中人决定的。因而这个博奕可认为是由下面两个步法组成的。即第一步法局中人 1, 2 分别选定“威胁”的策略  $x, y$ . 第二步法是局中人 1, 2 在完全知道第一步法时对方取的策略基础上,各自独立选定要求  $d_1, d_2$ . 然后局告终止。

現在設  $u_{1N} = M_1(x, y)$ ,  $u_{2N} = M_2(x, y)$ , 將  $d_1, d_2$  的函数  $g$  定义如下:

$$g(d_1, d_2) = \begin{cases} 1 & \text{两人的要求 } d_1, d_2 \text{ 同时达到时,} \\ 0 & \text{其他情况时.} \end{cases} \quad (15.1)$$

这样,經過以上的步法,一局終止时,局中人  $i$  的贏得  $p_i(x, y; d_1, d_2)$  由下式給出:

$$p_i(x, y; d_1, d_2) = d_i g + u_{iN}(1 - g) \quad (i=1, 2). \quad (15.2)$$

現在在交渉博奕  $I$  中,將第一步法各局中人所取的“威胁”策略  $x, y$  固定。因而,  $u_{1N}, u_{2N}$  的值固定。于是在这个条件下,博奕  $I$  的进行和局中人 1, 2 各自独立选定要求  $d_1, d_2$  的一个非合作博奕是相同的。这样考虑的非合作博奕,称为**要求博奕**(demand game), 記为  $DG(N)$ , 这个  $N$  是  $U$  平面上具有坐标  $u_1 = u_{1N}, u_2 = u_{2N}$  的点,称为“威胁”的点(threat point)。在要求博奕  $DG(N)$  中,局中人 1, 2 取要求  $d_1, d_2$  时,局中人  $i$  的贏得  $q_i(d_1, d_2 | N)$  由下式給出:

$$q_i(d_1, d_2 | N) = d_i g + u_{iN}(1 - g) \quad (i=1, 2). \quad (15.3)$$

于是,为了求交渉博奕  $I$  的解,可按下述进行:首先将一个“威胁”点  $N$  固定,在由此导出的要求博奕  $DG(N)$  中,决定各局中人的最优要求  $d_1^0(N), d_2^0(N)$ , 其次,根据“威胁”点  $N$  的变动,  $d_1^0(N), d_2^0(N)$  随着变动的情况,推导出原来交渉博奕  $I$  的解。

現在,从决定要求博奕  $DG(N)$  中,各局中人的最优要求开始。和合作博奕的情况一样,將效用集合  $R$  的結合最大效用集合的子集合,通过点  $N$  的水平綫和鉛直綫之間的部分,称为对应点  $N$  的協調效用集合,表为  $L(N)$ 。再在  $L(N)$  內任意点  $(d_1, d_2)$  中,固定  $d_2[d_1]$  而变动  $d_1[d_2]$ , 很明显,此时博奕  $DG(N)$  的局中人 1[2] 的贏得減少。这是因为这个贏得函数是由 (15.3) 給出的,因而協調效用集合  $L(N)$  的点都是要求博奕  $DG(N)$  的平衡点。我們从



这些存在着的无限多的平衡点中,用某种合理的方法,确定一个点,认为是要求博弈  $DG(N)$  的最优要求点。为此,试将博弈  $DG(N)$  平滑化。它的意义是博弈  $DG(N)$  变为由(15.3)给出的赢得函数  $q_i(d_1, d_2|N)$  ( $i=1, 2$ ),用某个近似的连续函数置换后的博弈。为此,将函数  $g(d_1, d_2)$  置换为下述那样的连续函数  $h(d_1, d_2)$ ,即函数  $h(d_1, d_2)$  是定义在  $U$  的全平面上,在  $R$  上取 1,随着点  $(d_1, d_2)$  离开  $R$ ,它的值愈接近 0 (但不能为 0) 的连续函数。然后,考虑局中人 1, 2 各自独立采取要求  $d_1, d_2$  时,各局中人  $i$  的赢得由

$$q_i(d_1, d_2|N, h) = d_i h(d_1, d_2) + u_{iN}(1 - h(d_1, d_2)) \quad (i=1, 2) \quad (15.4)$$

给出的博弈。这个博弈用  $DG(N, h)$  表示,称为要求博弈  $DG(N)$  经平滑化后的要求博弈。现在从确定这个博弈  $DG(N, h)$  的最优要求开始。

为此,变换各局中人的效用,使  $u_{1N}, u_{2N}$  成为 0, 0。变换后的效用平面为  $U'$ ,  $R$  变为  $R'$ 。这样,要求博弈  $DG(N, h)$  成为在  $U'$  平面上局中人 1, 2 采取要求  $d_1, d_2$  时,各局中人  $i$  的赢得由

$$q_i(d_1, d_2|0, h') = d_i h'(d_1, d_2) \quad (i=1, 2) \quad (15.5)$$

给出的要求博弈  $DG(0, h')$ 。当然这时的函数  $h'$  是定义在  $U'$  平面上的,在  $R'$  上取 1,随着点  $(d_1, d_2)$  离开  $R'$ ,它是愈接近 0 (但不能为 0) 的连续函数。

设在  $U'$  平面的第一象限中,使积  $d_1 d_2 h'(d_1, d_2)$  最大的点为  $P_h = (d_1(h'), d_2(h'))$ 。这样,当局中人 2[1] 将要求  $d_2[d_1]$  保持为  $d_2 = d_2(h')[d_1 = d_1(h')]$  时,局中人 1[2] 的赢得  $q_1(d_1, d_2(h')|0, h')[q_2(d_1(h'), d_2|0, h')]$  在  $d_1 = d(h')[d_2 = d_2(h')]$  时为最大。即点  $P_h$  是要求博弈  $DG(0, h')$  的平衡点。因而点  $P_h$  也是要求博弈  $DG(N, h)$  的平衡点。其次,设在  $U'$  平面的第一象限内,  $R'$  中使

积  $u_1 u_2$  为最大的点 (这样的点确实只存在一点) 为  $Q_N = (u'_1, u'_2)$ , 其最大值为  $\rho'$ . 于是, 点  $Q_N$  是  $U'$  平面上的双曲线  $u_1 u_2 = \rho'$  在第一象限内的分支  $\alpha\beta$  和有界闭凸集合  $R'$  的切点。另一方面, 由点  $P_h$  的定义,

$$d_1(h') d_2(h') h'(d_1(h'), d_2(h')) \geq u'_1 u'_2 h'(u'_1, u'_2) = u'_1 u'_2 = \rho',$$

而且  $0 \leq h'(d_1(h'), d_2(h')) \leq 1$ .

所以  $d_1(h') d_2(h') \geq \rho'$ .

因此, 点  $P_h$  在双曲线  $\alpha\beta$  的内部。而且随着函数  $h$  愈接近于函数  $g$ , 点  $P_h$  无限接近于点  $Q_N$ . 换言之, 不论连续函数  $h$  如何取法, 点  $Q_N$  是平滑化的博奕  $DG(N, h)$  的平衡点  $P_h$  的极限点。根据这种情况, Nash<sup>[6]</sup> 将点  $Q_N$  定义为要求博奕  $DG(N)$  的解点, 将要求  $d_1 = d_1^0(N)$ ,  $d_2 = d_2^0(N)$  定义为要求博奕  $DG(N)$  的最优要求。在此,  $d_1^0(N)$ ,  $d_2^0(N)$  是点  $Q_N$  在  $U$  平面上的坐标。

在以上的讨论中, 假定了  $U'$  平面上存在使  $u_1 > 0$ ,  $u_2 > 0$  的  $R'$  的点  $(u_1, u_2)$ , 但是即使不作这样的假定, 也可同样地讨论。

其次, 说明要求博奕  $DG(N)$  的解点  $Q_N$  的几何性质。  $U'$  平面的双曲线  $\alpha\beta$  是等轴双曲线, 所以通过点  $Q_N$  的双曲线的切线  $Q_N T_N$  的斜率等于直线  $NQ_N$  的斜率 (正值) 变号后的值。而且切线  $Q_N T_N$  是 (如同 § 14 的合作博奕情况) 效用集合  $R'$  的支持线。由此, 我们得出下面的结论:

点  $Q_N$  为  $U'$  平面第一象限内  $R'$  的点, 若通过此点的  $R'$  的支持线的斜率与直线  $NQ_N$  的斜率具有相反的符号, 则点  $Q_N$

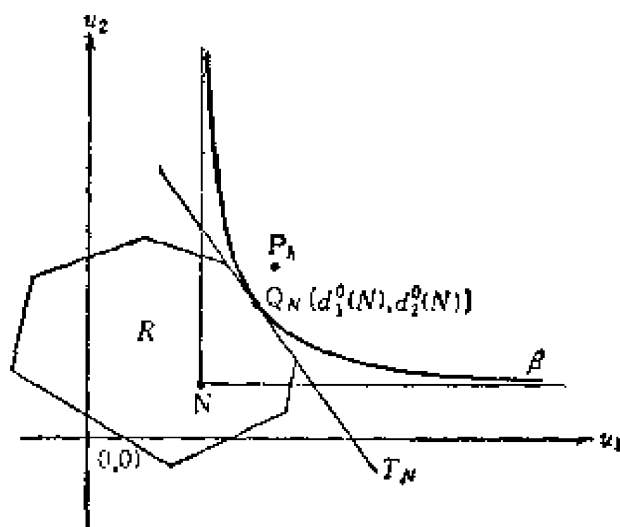


图 15.1

就是要求博弈  $DG(N)$  的解点。

现在根据任意要求博弈  $DG(N)$  的解点  $Q_N$  的定义和它的唯一存在性,将原来求交涉博弈  $I$  的解的问题归结为求下面规定的博弈  $I^*$  的解的问题。博弈  $I^*$  只由一个步法构成,设在这个步法上局中人 1, 2 选取策略  $x, y$ , 而这时局中人  $i$  的赢得为  $q_i^*(x, y)$  ( $i=1, 2$ ), 可按下面规则确定:局中人 1, 2 取策略  $x, y$  时,与此相对应地,在  $R$  中定出“威胁”的点  $N=(u_{1N}, u_{2N})$  (在此  $u_{1N}=M_1(x, y)$ ,  $u_{2N}=M_2(x, y)$ )。由此导出要求博弈  $DG(N)$ 。设此要求博弈  $DG(N)$  的解点为  $Q_N=(u_1^0(N), u_2^0(N))$ 。这样,

$$q_i^*(x, y) = u_i^0(N) \quad (i=1, 2). \quad (15.6)$$

此博弈  $I^*$  称为“威胁”博弈。

在求“威胁”博弈  $I^*$  的解之前,要注意下面事项。通过  $R$  的结合最大效用集合的任意点  $Q$  的  $R$  支持线,唯一定出一条直线,它也通过点  $Q$ , 其斜率和支持线斜率(负值)符号相反。这条直线在  $R$  中的部分(线段)称为通过  $Q$  的  $R$  径线。这样,以通过  $Q$  的径线上任意点  $N$  为“威胁”点的要求博弈  $DG(N)$ , 都以点  $Q$  为解点。因而在  $R$  径线上的“威胁”点  $N$  愈位于上方[下方]时,则要求博弈  $DG(N)$  愈对局中人 2[1] 有利,而对局中人 1[2] 不利(这是因为结合最大效用集合折线有负的斜率)。

现在将“威胁”博弈  $I^*$  中局中人 1 的“威胁”策略  $x \in S^{(1)}$  固定,这时,再作一个使局中人 2 的策略集合  $S^{(2)}$  中的点  $y$ , 对应于  $R$  的点  $N$  的映照  $T_x$ , 定义如下:

$$T_x: S^{(2)} \ni y \rightarrow N = (M_1(x, y), M_2(x, y)) \in R.$$

由于函数  $M_1(x, y)$ ,  $M_2(x, y)$  都是  $y=(y_1, \dots, y_n)$  的线性函数,所以映照  $T_x$  是由  $S^{(2)}$  到  $R$  的线性变换。根据这个变换  $x$ , 设在  $S^{(2)}$  的  $R$  中的象上,对于局中人 2 最希望的属于  $R$  径线的部分为  $R(x)$ , 这样,以  $R(x)$  的任意点  $N$  为“威胁”点的要求博弈  $DG(N)$

是(只限于局中人1固定“威胁”策略 $x$ )給出局中人2最有利解点的要求博奕。因而設  $S^{(2)}(x) = T_x^{-1}[R(x)]$ , 則  $S^{(2)}(x)$  的任意元素  $y$  是在“威胁”博奕  $I^*$  上, 对应于局中人1的“威胁”策略  $x$ , 是局中人2的最优“威胁”策略。由于映照  $T_x$  是綫性变换, 所以  $S^{(2)}(x)$  是  $S^{(2)}$  的閉凸子集。完全同样地, 在“威胁”博奕  $I^*$  中, 当局中人2固定“威胁”策略  $y$  时, 可定出与此相对应的, 局中人1的最优“威胁”策略  $x$  的集合  $S^{(1)}(y)$ , 它是  $S^{(1)}$  的閉凸子集。

因此, 設由  $S^{(1)} \times S^{(2)}$  的点  $(x, y)$  到  $S^{(1)} \times S^{(2)}$  的有界閉凸子集  $S^{(1)}(y) \times S^{(2)}(x)$  的点集映照为  $\varphi$ . 可見映照  $\varphi$  是上半連續的。因此, 根据輔助定理 13.2, 至少存在  $S^{(1)} \times S^{(2)}$  的点  $(x^0, y^0)$ , 使

$$(x^0, y^0) \in S^{(1)}(y^0) \times S^{(2)}(x^0). \quad (15.7)$$

这一結果的意义是: 在“威胁”博奕  $I^*$  中, 存在局中人1, 2的“威胁”策略組  $(x^0, y^0)$ , 当局中人1用“威胁”策略  $x^0$  时, 局中人2的最优“威胁”策略是  $y^0$ , 而局中人2用“威胁”策略  $y^0$  时, 局中人1的最优“威胁”策略是  $x^0$ . 也就是說, 博奕  $I^*$  有局中人1, 2的策略組  $(x^0, y^0)$ , 具下面的性质:

$$q_1^*(x^0, y^0) = \max_x q_1^*(x, y^0), \quad (15.8)$$

$$q_2^*(x^0, y^0) = \max_y q_2^*(x^0, y). \quad (15.9)$$

因而策略組  $(x^0, y^0)$  是博奕  $I^*$  的平衡点。

此外, 要說明一下在博奕  $I^*$  中, 策略組  $(x^0, y^0)$  具有2人零和博奕的解所具有的鞍点性质。为此, 考虑博奕  $I^*$  中局中人1, 2取  $x^0, y^0$  时的贏得  $q_1^*(x^0, y^0), q_2^*(x^0, y^0)$ . 它們是由“威胁”点  $N^0 = (M_1(x^0, y^0), M_2(x^0, y^0))$  导出的要求博奕  $DG(N^0)$  的解点  $Q_{N^0}$  的坐标, 而且点  $Q_{N^0}$  属于效用集合  $R$  的結合最大效用集合。于是結合最大效用集合的折綫有負的斜率。因而其上的点的坐标  $u_1, u_2$  互为減函数。所以在博奕  $I^*$  中, 当局中人1取策略  $x^0$  时,

局中人2变更策略  $y^0$ , 是为了使得局中人1的赢得减少, 自己的赢得增加。但是因为  $(x^0, y^0)$  是平衡点, (15.9) 成立, 而局中人1已采用了策略  $x^0$ , 所以这是不可能的。因此, 得到下面的结果:

$$u_1^0(N^0) \equiv q_1^*(x^0, y^0) = \min_y q_1^*(x^0, y). \quad (15.10)$$

同样

$$u_2^0(N^0) \equiv q_2^*(x^0, y^0) = \min_x q_2^*(x, y^0). \quad (15.11)$$

所以根据 (15.8) ~ (15.11), 策略组  $(x^0, y^0)$  有下面的性质:

$$\begin{aligned} \max_x q_1^*(x, y^0) &= q_1^*(x^0, y^0) = u_1^0(N^0) = \min_y q_1^*(x^0, y), \\ \max_y q_2^*(x^0, y) &= q_2^*(x^0, y^0) = u_2^0(N^0) = \min_x q_2^*(x, y^0). \end{aligned} \quad (15.12)$$

现在设满足条件 (15.7) 的点, 除  $(x^0, y^0)$  外还有  $S^{(1)} \times S^{(2)}$  的点  $(x^*, y^*)$ . 这时设

$$q_i^*(x^*, y^*) = u_i^0(N^*) \quad (i=1, 2).$$

则和 (15.12) 同样, 下面等式成立:

$$\begin{aligned} \max_x q_1^*(x, y^*) &= q_1^*(x^*, y^*) = u_1^0(N^*) = \min_y q_1^*(x^*, y), \\ \max_y q_2^*(x^*, y) &= q_2^*(x^*, y^*) = u_2^0(N^*) = \min_x q_2^*(x, y^*). \end{aligned} \quad (15.13)$$

这时, 由 (15.12), (15.13), 得到

$$u_1^0(N^0) = \min_y q_1^*(x^0, y) \leq q_1^*(x^0, y^*) \leq \max_x q_1^*(x, y^*) = u_1^0(N^*),$$

即

$$u_1^0(N^0) \leq u_1^0(N^*). \quad (15.14)$$

同样可得

$$u_1^0(N^*) \leq u_1^0(N^0). \quad (15.15)$$

因而, 由 (15.14), (15.15) 得

$$u_1^0(N^0) = u_1^0(N^*). \quad (15.16)$$

此外, 和上面同样有

$$u_2^0(N^0) = u_2^0(N^*). \quad (15.17)$$

这就是說，博奕  $I^*$  即使有多于两个以上的平衡点，而在这些点上各局中人的赢得是相同的。

根据以上的考察，可知在交渉博奕  $I$  中，存在具有下面性质的局中人 1, 2 的“威胁”策略  $x^0, y^0$  和要求  $d_1 = u_1^0, d_2 = u_2^0$ ：

- (1) 局中人 1 使用“威胁”策略  $x^0$ ，至少可以确保要求  $u_1^0$ 。
- (2) 局中人 2 使用“威胁”策略  $y^0$ ，至少可以确保要求  $u_2^0$ 。
- (3) 局中人 1, 2 的“威胁”組  $(x^0, y^0)$  是对于另外“威胁”的最优“威胁”。也就是  $(x^0, y^0)$  是博奕  $I^*$  的平衡点。
- (4) 若  $(x^*, y^*)$  是博奕  $I^*$  的另一个平衡点，則  $x^*$  对于局中人 1，和  $x^0$  一样，可至少确保要求  $u_1^0$ ， $y^*$  对于局中人 2，和  $y^0$  一样，可至少确保要求  $u_2^0$ 。

根据这种情况，Nash<sup>[6]</sup> 将  $(u_1^0, u_2^0)$  定义为交渉博奕  $I$  的值，将  $x^0, y^0$  分別定义为博奕  $I$  中局中人 1, 2 的最优“威胁”。至于它們的存在性，由以上的說明已經得到証明了。

## 参 考 文 献

- [ 1 ] Blackwell, David, and M. A. Girshick: Theory of Games and Statistical Decisions, John Wiley & Sons, New York, 1954.
- [ 2 ] Luce, R. Duncan and Howard Raiffa: Games and Decisions, John Wiley & Sons, New York, 1957.
- [ 3 ] McKinsey, J. O. C.: Introduction to the Theory of Games, McGraw-Hill Book Co., New York, 1952.  
(有中譯本,博奕論導引,高鴻助等譯,人民教育出版社,1960.)
- [ 4 ] Nash, John: The Bargaining Problem, *Econometrica*, 18 (1950).
- [ 5 ] Nash, John: Non-Cooperative Games, *Annals of Mathematics*, 54(1951).
- [ 6 ] Nash, John: Two-Person Cooperative Game, *Econometrica*, 21 (1953).
- [ 7 ] von Neumann, John and Oskar Morgenstern: Theory of Games and Economic Behavior, Princeton University Press, First edition, 1944; Second edition, 1947.